This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Google

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

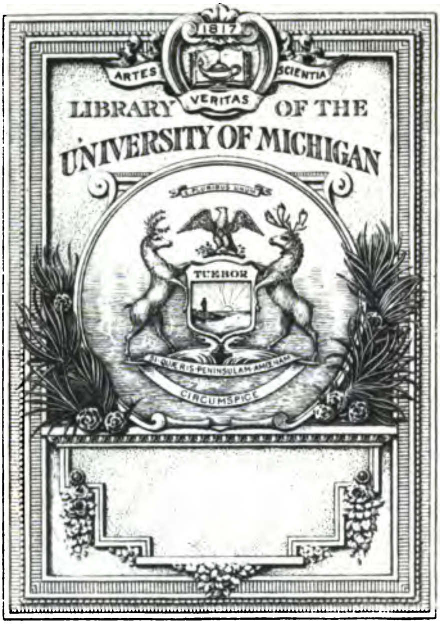
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

303
C 2915

~~[illegible]~~

S. Heegaard.

Betrachtungen
über
die Theorie
der
Infiniteſimalrechnung

von Lazare Nicolas Marguerite

dem Bürger Carnot,

Mitgliede des Franzöſiſchen National-Inſtituts.

Aus dem Franzöſiſchen überſetzt,

und

mit Anmerkungen und Zuſäzen

begleitet

von

Iohann Karl Friedrich Hauff.

Frankfurt am Main,

in der Jägerſchen Buchhandlung

1800.

Hist of Science
Hdstt
10-5-39
39132

Nachricht.

Der Verſasser dieser Betrachtungen hat sie schon vor einigen Jahren in die Form gebracht, worin er sie gegenwärtig bekannt macht. Jezt *) sind ihm Geschäfte aufgetragen, deren Wichtigkeit ihm nicht verstattet, auf seine frühern Arbeiten zurückzukommen; da aber alles ankündigt, daſs die Cultur der Mathematik einen neuen Schwung bekommen werde, so hielt er die Bekanntmachung einer Abhandlung für nüzlich, worin die Theorie der Differentialrechnung ausführlich und genau auseinander gesezt ist, und worin die verschiedenen Gesichtspunkte, aus welchen man diese Theorie betrachtet hat, zusammengestellt sind.

*) Das Original erschien im Jahr 1797. H.

1-26-40

[illegible]

[illegible]

Inhalt

der Abhandlung.

Gegenſtand der Schriſt	§.	1.
Möglicher Urſprung der Infiniteſimalrechnung	–	2.
Man muſste ſie anfänglich als eine bloſse Näherungsmethode betrachten .	–	4.
Späterhin machte man die Entdeckung, daſs ſie doch zu völlig genauen Reſultaten führe	–	7.
Dieſe Genauigkeit der Reſultate beruhet blos auf einer Aufhebung der Fehler	–	9.
Gründe dieſer Aufhebung . . .	–	10.
Mittel, dieſe Aufhebung in jedem beſondern Falle zu bewirken . . .	–	11.
Hauptgröſsen	–	14.
Hülfsgröſsen	–	15.
Lezte Verhältniſse	–	16.
Gränzen oder lezte Werthe . . .	–	17.
Das unendlich Kleine	–	19.
Das unendlich Groſse	–	20.

Unendliche und endliche Gröſsen . . §. 22.
Verschiedene Vorstellungsarten von den unendlich kleinen Gröſsen . §. 24–27.
Gröſsen, die in Ansehung einer andern unendlich- groſs oder klein sind . §. 28.
Unendlich wenig unterschiedene Gröſsen – 29.
Infinitesimalrechnung . . . . – 30.
Unvollkommene Gleichungen . . . . – 31.
Erste Gründe der Infinitesimalrechnung §. 32–35.
Geist dieser Rechnung . . . . . §. 36.
Die Analysis des Unendlichen ist eine Anwendung oder Erweiterung der Methode der unbestimmten Coefficienten (Méthode des indéterminées.) . – 37.
Gränzenmethode . . . . . . – 38.
Schwierigkeiten dieser Methode in der Anwendung . . . . – 39.
Ursprung des Namens: unendlich kleine Gröſse . . . . – 40.
Zwei Arten des mathematischen Unendlichen . . . . . . – 41.
Eigenschaften der verschwindenden Gröſsen – 42.
Verschiedene Gesichtspunkte aus welchen die Infinitesimalrechnung betrachtet werden kann . . . . . – 44.

Die verſchwindenden Gröſsen sind eingebildete Dinge . . . . . . §. 46
Beantwortung einiger Einwendungen gegen diese Theorie . . . . §. 47–48.
Gründe der Differential- und Integralrechnung . . . . . . §. 49–58.
Anwendung dieser Gründe auf einige Beyspiele . . . . §. 59–67.
Schluſs aus diesen Betrachtungen . §. 68.

Inhalt

der Zusaeze.

Die unendlichen Gröſsen der Neueren sind bey den Alten nicht zu finden §. 1.
Kepler hat zuerst den Begriff der unendlich kleinen Gröſsen in die Mathematik eingeführt . . . . . . – 2.
Cavalleri's Methode des Untheilbaren – 3.
Fermat's Methode der gröſsten und kleinsten Werthe . . . . . . – 4.
Barrow's Tangentenmethode . . . – 5.
Kürzere Darstellung derselben . . – 6.
Von Gregory's, Sluse's, Newtons Tangentenmethoden . . . . – 7.
Leibnizens Tangentenmethode . . – 8.

Geſchichte und Entſcheidung des Streits über die Erfindung der Infiniteſimalrechnung . . . . . § 9–10.
Darſtellung von Newtons Methode und ſeinem Calcul . . . . – 11–14.
Schluſs aus dem Vorhergehenden . . §. 15.
Carnot hat den Weg richtig gezeigt, den die Erfinder der Infiniteſimalrechnung gegangen ſind . . . . – 16.
Beſtättigung dieſer Behauptung durch die übereinſtimmenden Urtheile der Hrn. L'Huilier und La Grange . . – 17.
Mängel der bisherigen Theorie der Infiniteſimalrechnung; Preisfrage der Berliniſchen Akademie vom Jahre 1784. – 18.
Ueber Herrn L'Huilier's Preisſchrift – 19.
Verſuch einer Apologie des Unendlichen – 20.

Vor–

Vorrede
des Uebersezers.

Die Schrift, welche ich gegenwärtig dem mathematischen Publicum meines teutschen Vaterlandes in einer Uebersezung übergebe, erschien zu Paris im Jahr 1797 unter dem Titel: *Réflections sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal.* Dieser Titel, als ich ihn zuerst in französischen Bücherverzeichnissen fand, machte meine Aufmerksamkeit wenig rege, einmal, weil ich auch, wie Hr. Hofrath Kaestner, da ich ihm zuerst Nachricht von dem Buche gab, von eines Franzosen Metaphysik über Geometrie nicht viel erwartete, und dann weil ich den Verfasser zwar als einen der vorzüglichsten Praktiker, aber durchaus nicht als speculirenden Geometer kannte. Indessen war dies von meiner Seite ein blosses Vorurtheil, das ich ablegte, sobald ich von La Croix diesfalls eines bessern belehrt wurde. Dies geschah durch folgendes Urtheil dieses trefflichen Analysten: *)

(*) Traité du Calcul différentiel et du Calcul integral. Tom. I. Paris 1797. Pref. p. XXI. ff.

„Carnot bemerkt in einer Abhandlung, wor-„in er in die Gründe der Differentialrechnung mit „vieler Sorgfalt auseinandersezt, und die er mir „mitzutheilen die Güte hatte, daſs das *Gesez der Ste-„tigkeit* es sey, vermöge dessen die verschwinden-„den Gröſsen noch in demselben Verhältnisse blei-„ben, dem sie, vor dem Verschwinden, sich stuf-„fenweise näherten.“

„Diese Abhandlung, von welcher zu wünschen „wäre, daſs der Verfasser sie öffentlich bekannt „machte, beweiſst, daſs, wenn man nur Worte „gebildet hätte, wie man sie nöthig hatte, man „auch deutlichere Begriffe würde erhalten haben. „Dadurch, daſs Carnot die Differentialgleichun-„gen *unvollkommene* Gleichungen nennt, verbreitet „er ein groſses Licht über ihre Theorie.“

„Wenn man nämlich die Differentiale, wel-„che sie enthalten, als Ausdrücke für die Zunah-„men der veränderlichen Gröſsen betrachtet, so ha-„ben sie in der That nur eine näherungsartige Gül-„tigkeit; aber der Grad ihrer Genauigkeit ist ge-„wissermassen unbestimmt, denn er hängt von der „Kleinheit ab, die man bey den Veränderungen der „veränderlichen Gröſsen annimmt, und da dieser „Kleinheit durch nichts eine Gränze gesezt ist, so „können auch die Differentialgleichungen der Wahr-„heit so nahe kommen, als man will. So lassen „sich Leibnizens Vorstellungen in die Analysis ein-

„führen. Carnot zeigt in der Folge, wie am „Ende der Rechnung, die unvollkommenen Glei„chungen genau werden, und an welchem Zeichen „man ihre Statthaftigkeit erkennen könne. Dies „Zeichen ist das gänzliche Verschwinden der Diffe„rentialgröſsen, von welchen der Irrthum herrüh„ren könnte, wenn ein solcher darin steckte.“

„Man muſs Carnot's Arbeit nicht nach dem „Wenigen, was ich hier davon gesagt habe, beur„theilen; Das Verdienst seiner Abhandlung besteht „nicht blos in der ihm eigenen Ansicht der Diffe„rentialrechnung, sondern auch in der Vergleichung „die er zwischen den verschiedenen Gesichtspunk„ten anstellt, aus welchen man diese Rechnung dar„gestellt hat.“

Aus diesem Urtheile, das eine genauere Bekanntschaft mit der Schrift selbst, bey meinen Lesern ebenso, wie bey mir, vollkommen rechtfertigen wird, können diese auch schon voraus im Allgemeinen übersehen, was sie von dieser Schrift zu erwarten haben.

Ich selbst glaube den Gesichtspunkt, aus welchem sie dieselbige zu betrachten haben, ihnen vorläufig nicht genauer und bestimmter angeben zu können, als wenn ich ihnen sage, der Verfasser habe dabey die Absicht gehabt, den ersten Theil der Berlinischen Preisfrage vom Jahre 1784,

nämlich die Frage: „*Wie war es möglich, aus einer widersprechenden Vorausſezung ſo viele wahren Lehrsäze herzuleiten?*“ vollständig zu beantworten. Eine ausführlichere Erörterung dieses Gesichtspunkts werden sie im 18ten §. meiner Zusäze finden.

Die Infinitesimalrechnung hat nämlich das eigene und merkwürdige Schicksal gehabt, daſs, gerade hundert Jahre nach ihrer ersten öffentlichen Bekanntmachung, — also nachdem sie bereits ebenso lange zu den wichtigsten Entdeckungen in allen Theilen der Mathematik und Naturlehre mit dem glücklichsten Erfolge war angewandt worden — eine der ersten europäischen Akademien die Richtigkeit und Zulässigkeit ihrer Gründe aufs neue in Anspruch nahm, und entweder eine genugthuende Rechtfertigung derselben, oder ein, in Absicht auf Leichtigkeit und Kürze der Rechnung gleichbrauchbares Surrogat für sie verlangte. Die Schrift, welche den von der Akademie ausgesezten Preis erhielt, machte das lezte zu ihrem Hauptgegenstande, und begnügte sich das erste blos durch einen Wink anzudeuten. Mehrere Analysten lieferten bald darauf andere dergleichen Surrogate, unter welchen sich besonders die von La Grange bekanntgemachte *Theorie der Functionen*, als ein Meisterstück des analytischen Scharfsinns auszeichnet; und seit dieser Zeit schien die Meinung, als ob die Gründe der Infinitesimalrechnung einer

vollständigen Rechtfertigung überall nicht fähig wären, unter einem ansehnlichen Theile des mathematischen Publicums allmälig herrschend zu werden. Bey dieser Lage der Wissenschaft trat nun Carnot mit der gegenwärtigen Abhandlung hervor, worin er die verlangte Rechtfertigung der ersten Gründe der Infinitesimalrechnung wirklich führt, und eben damit beweist, daſs wir eines anderweitigen Surrogats für diese Rechnung keineswegs bedürfen. Schon dieses Verhältniſs des Zwecks und Inhalts dieser Abhandlung, zu der gegenwärtigen Lage der Wissenschaft muſs ihr nothwendig eine ganz vorzügliche Aufmerksamkeit aller Kenner und Freunde derselben versichern.

Eben so gerechte Ansprüche auf eine solche erhält sie aber auch, wie jeder unpartheyisch prüfende Leser wird zugestehen müssen, durch die Art der Ausführung selbst. Und sonach bedürfte also der Entschluſs, diese Frucht des französischen Scharfsinns auf teutschen Boden zu verpflanzen, an sich wohl keiner weiteren Rechtfertigung.

Daſs aber *ich* diesen Entschluſs gefasset und ausgeführt habe, nachdem ein Mann, der in dem wohlgegründeten Kredit steht, darüber urtheilen zu können, mir Kenntniſs der französischen Sprache, und also eben damit die Fähigkeit, aus dieser Sprache in die teutsche zu übersetzen

öffentlich abgesprochen hat, dies bedarf gar sehr einer Rechtfertigung.

Der Mann, der mir diese Rechtfertigung abnöthiget, ist der herzogl. Sachsen-Gothaische Obristwachtmeister und Direktor der Sternwarte zu Seeberg, Herr von Zach, und die Art, wie Er solches thut, folgende:

In der Einleitung zum 3ten Bande der Allgemeinen Geographischen Ephemeriden S. 11. sagt Herr Major von Zach: „Wahrscheinlich ist La Plaçe in seiner Muttersprache nicht gründlich bewandert, und wird sie wohl — doch nicht von seinem Uebersezer erlernen müssen, der S. 4. S. 15. S. 177. des 1ten Theils und S. 138. des 2ten Theils Beweise genug von seiner Unkunde in dieser Sprache giebt. *Etablissement du Port* übersezt er z. B. *Einrichtung des Hafens*; also Etablissement de la Côte heist Einrichtung der Küste! Wir haben diesen See-Ausdruck in den A. G. E. durch Hafenzeit *gegeben*. Was mag sich aber der Uebersezer von La Place's Werk bey einer *Einrichtung des Hafens* wohl gedacht haben?“

Ich fange die Beantwortung dieser Vorwürfe bey dem leztēn an, weil ich gegen diesen das meiste werde zu erinnern haben.

I. bemerke ich, daſs, da der Ausdruck: *établissement du port*, nach des Herrn Majors eigenem

Geständnisse, ein See-Ausdruck, oder noch bestimmter, ein Kunstwort aus der Schiffersprache ist, ich, als Uebersezer, meiner Pflicht Genüge gethan habe, wenn ich, in Ermanglung eines völlig gleichgeltenden teutschen Ausdrucks – daſs dies hier der Fall sey, werde ich in der Folge zeigen – jenes Kunstwort, der Analogie der Sprache gemäſs, übersezte, und meiner Uebersezung den Ausdruck der Urschrift in einer Parenthese beyfügte. Dies ist aber an beyden Stellen, wo dieser Ausdruck vorkommt, nämlich S. 152 des 1ten und S. 170 des 2ten Theils der Uebersezung geschehen. Auf solche Art kann der Leser durch die Uebersezung um desto weniger irre geführt werden, da der Verfasser selbst an beyden Stellen bestimmt und deutlich erklärt hat, was er darunter verstehe.

II. Wenn der Hr. M. v. Z. an dem vorerwähnten Orte in Absicht auf diesen Ausdruck mich auf seine eigene Auctorität verweiſet, indem Er vorgiebt, *Er* habe solchen in den A. G. E. durch *Hafenzeit* gegeben, so ist dies aus einem dreyfachen Grunde lächerlich:

1) weil ein thüringischer Astronome keine Auctorität haben *kann*, wenn von Kunstwörtern der Schiffersprache die Rede ist.

2) weil es nicht einmal an dem ist, daſs der Hr. M. v. Z. den Ausdruck *établissement du port*

durch *Hafenzeit* übersezt habe, wie die genauere Ansicht des 1ten Bandes der A. G. E. sogleich zeigt. Denn S. 491 erzählt der Herr Major, de la Lande habe schon im May 1796 an ihn geschrieben: „Können Sie mir nicht die *Fluthzeiten* *) an den deutschen Küsten und Häfen verschaffen?“ Er habe sich hierauf an den Hrn. Schiffs-Capitain Müller in Stade gewandt, und von diesem die Antwort erhalten, die Er S. 490 ff. mittheilt, und deren Anfang so lautet: „Wegen der *Hafenzeiten*, die Sie --- verlangen, etc. etc.“ Offenbar ist es also Hr. Cap. Müller, der den Ausdruck: *Hafenzeit* in den A. G. E. *zuerst* gebraucht, so wie er es auch ist, der durch ihn S. 494 das französische *établissement du Port*, in *einer* der beyden Bedeutungen, die es bey La Plaçe führt, übersezt hat. Im 2ten Bande kommt der Ausdruck gar nicht vor, und im 3ten ausser der mehrerwähnten Stelle, wo der Hr. M. v. Z. ihn gebraucht zu haben vorgiebt, nur S. 123. wo der dänische See-Capitain, Herr von Loewenoern ihn wirklich gebraucht.

3) Weil, wenn ich auch noch so gerne der angeblichen Auctorität des Hrn. Majors hätte folgen wollen, solches doch, der Zeit nach, unmöglich war, indem das Aprilstück der A. G. E. vom Jahr 1798, wo der Ausdruck zum erstenmal vorkommt,

(*) Welches Wort des, ohne Zweifel französisch geschriebenen, Briefs hier durch *Fluthzeiten* ausgedrückt sey, ist nicht angezeigt.

ein ganzes Jahr später erschien, als meine Uebersezung des 1ten Theils von La Plaçe's Werke.

III. Obschon aber der Ausdruck: *Hafenzeit*, nach dem Obigen, die Auctorität zweyer gelehrten See-Officiere für sich hat, so würde mich, wenn ich auch gleich diesen Band der A. G. E. bey Ausarbeitung meiner Uebersezung schon vor mir gehabt hätte, dieses doch nicht haben bestimmen können, das französische *établissement du port* durch *Hafenzeit* zu übersezen.

1) weil der Sprachgebrauch in Ansehung dieser beyden Ausdrücke in beyden Sprachen nichts weniger als gleichförmig und beständig ist. Denn bey La Plaçe selbst heiſst S. 152 des 1ten Theils *établissement du port* die Zeit, welche zwischen dem wahren Mittage oder der wahren Mitternacht und dem Augenblicke der vollen See in den Syzygien verflieſst, S. 170 des 2ten Theils aber die Zeit der Fluth in den Syzygien selbst. Nach Herrn Cap. Müller hingegen (A. G. E. 1. Bd. S. 494.) bezeichnet das teutsche *Hafenzeit* das französische *établissement du port* oder *de la Côte* nur in der lezten, nicht in der ersten Bedeutung. Damit stimmt auch Hr. Cap. von Loewenoern überein, nach welchem (A. G. E. 3 Bd. S. 123.) unter *Hafenzeit* die Zeit der gröſsten Ebbe oder Fluth am Neu- oder Vollmondstage zu verstehen ist. Endlich wird man durch das Register des 1ten Bands der A. G. E. in Versuchung geführt, *Hafenzeiten* mit *Ebbe- und Fluth-*

zeiten ſchlechthin für ſynonym zu halten, weil S. 724. bey dem Worte: *Hafenzeiten* auf das Wort: *Ebbe- und Fluthzeiten* verwieſen wird, unter dem lezteren aber S. 721. gerade die Seiten des Buchs angeführt werden, wo von *Hafenzeiten* die Rede iſt. Und dieſe Meinung erhält deſto mehr Wahrſcheinlichkeit durch den Umſtand, daſs in der obenerwähnten Stelle Hr. M. v. Z. für ſeinen Freund La Lande vom Hrn. Cap. Müller *Fluthzeiten* verlangt, und von dieſem über *Hafenzeiten* Auskunft erhält; Denn daſs Fluthzeiten und Hafenzeiten ſich wie Gattung und Art unterſcheiden, iſt nirgends bemerkt, ſondern dem Leſer zu errathen überlaſſen.

Wie laſſen ſich nun dieſe verſchiedenen Angaben mit einander vereinigen? Wie läſst ſich aus denſelben herausbringen, was eigentlich *Hafenzeit* und was *établiſſement du port* ſey? Und wie kann man, bevor dieſes ausgemacht iſt, behaupten, daſs jenes ein gleichgeltender Ausdruck mit dieſem ſey?

2) Weil ich es als einen ſehr erheblichen Grund gegen die Richtigkeit und Zuläſsigkeit der Ueberzezung des Ausdrucks: *établiſſement du port* durch: *Hafenzeit* anſehen muſste, daſs die Franzoſen, ſchon ſeit länger als einem Jahrhunderte, für das was *Hafenzeit* bey dem Herrn Cap. Müller und von Loewenoern und was établiſſement du port in der zweyten angeführten Stelle bey La Plaçe heiſst, ein *eigenes* und *einziges* Wort, das Wort *Ma-*

line *) haben, dessen Ausmerzung aus der Schiffersprache auch Wörterbücher aus den zwey lezten Decennien noch nicht vermuthen lassen.

IV. Wenn der Hr. v. Z. sich berechtiget glaubt, meine Uebersezung: *Einrichtung des Hafens*, durch die Instanz: „also établissement de la côte heiſst: *Einrichtung der Küste!*" als ungereimt und unstatthaft darzustellen, so glaube ich gerade so viel Recht zu haben, dieselbige Schluſsart auf den von Ihm vorgeschlagenen und Sich selbst vindicirten Ausdruck der Herren Müller und von Loewenoern anzuwenden, und diesem die Instanz entgegen zu sezen: „also établissement d'un négoçiant heiſst *Kaufmannszeit!*"

V. Daſs ich bey dem Ausdrucke: *Einrichtung des Hafens* etwas, und etwas bestimmtes gedacht habe, bin ich bereit, jedem, der mich in der gebührenden Ordnung -- nicht im Tone eines Präceptors, der, im Glauben an seine Untrüglichkeit, jede Abweichung von *seiner* Vorschrift, *schon als solche*, dem Schüler zum Verbrechen macht, -- darum fragt, zu beweisen; ob ich gleich übrigens weit entfernt bin, zu behaupten, daſs dieser Ausdruck in jeder Rücksicht der schicklichste unter allen sey, die ich zu Bezeichnung dessen, was ich dabey gedachte, hätte wählen können.

(*) S. OZanam Dictionaire Mathemat. Paris. 1691. 4. p. 225.

Die vier übrigen Fehler, welche der Hr. M. v. Z. am angeführten Orte nur nach den Seitenzahlen anzugeben beliebt hat, sind so unbedeutend, daſs ich die Geduld meiner Leser zu misbrauchen fürchten müſste, wenn ich sie der Reihe nach namhaft machen, und dieses von jedem derselben besonders zeigen wollte. Es genügt mir daher im Allgemeinen von ihnen zu versichern, daſs sie niemand, auch nur einen Augenblick, aufhalten können, sondern sich, gleich auf den ersten Blick, jedem Billigen, als Spuren der Eilfertigkeit ankündigen müssen, womit ich arbeitete, und arbeiten muſste, da ich das Original von La Place's Werke, erst nach dem Neujahre 1797 erhielt, und der erste Theil meiner Uebersezung in der nächsten Ostermesse schon ausgegeben werden sollte, da ich zu gleicher Zeit, ausser einer andern anonymen Schrift, auch noch die Ausgabe meiner Uebersezung von Euklids *Elementen* veranstaltete, von dieser, welche hier gedruckt wurde, eine dreyfache Correctur selbst besorgte, ausserdem täglich drey Collegien, und darunter ein praktisches, welches mir viele Zeit wegnahm, las, und sonst noch so manche andere Pflichten in meinen übrigen amtlichen und häuslichen Verhältnissen zu erfüllen hatte, und das alles in *einem Winter*. Da aber gleichwohl der H. M. v. Zach am angeführten Orte behauptet hat, daſs ich, durch die vier angezeigten Fehler Beweise genug von meiner Unkunde in der französischen Sprache gegeben habe, — ein

Urtheil, das bey manchem Leser den Gedanken veranlassen könnte: „es dürfte, unter diesen Umständen, wohl eine Nach-Uebersezung von einem so wichtigen Werke zu wünschen seyn“ -- so kann ich von meinen Lesern nicht fordern, daſs sie mir meine obige Versicherung auf mein Wort glauben sollen, und es ist mir daher höchst erwünscht, daſs ich mich diesfalls auf das Zeugniſs eines so einsichtsvollen und unpartheyischen Richters berufen kann, als der mir unbekannte Recensent meiner Uebersezung in der A. L. Z. 1798. No. 50. S. 397. ff. ist, welcher ungeachtet seine ganze Beurtheilung zeigt, daſs er mir nichts habe schenken wollen, doch gesteht, daſs er meine Uebersezung *überall sehr sorgfältig und fleiſsig gearbeitet* gefunden habe.

Die auch vom Hrn. M. v. Z. getadelte Stelle S. 15. des ersten Theils, wo ich die Worte des Originals: *en plus et en moins* -- offenbar nur, um mich von jenem so wenig, als möglich, zu entfernen, -- durch: *vom Mehreren zum Minderen* ausgedrückt habe, zeichnet dieser Recensent als die einzige Stelle aus; wo ihm der Sinn *nicht vollkommen genau* ausgedrückt scheine, weil ich, nach seiner Meinung, dafür hätte sezen sollen: *durch Zu- und Abnahme*, oder, *von ihrem höchsten bis zu ihrem kleinsten Werthe*; sezt aber ausdrücklich hinzu: „*gerade diese unbedeutende Rüge solle beweisen, daſs ihn die Uebersezung in der Hauptsache völlig befriedigt habe.*“

So viel zu meiner Rechtfertigung gegen die mir angeschuldigte Unfähigkeit aus dem Französischen zu übersezen, in Beziehung auf die vom Herrn M. v. Z. angeführten Stellen!

Ausser diesem aber ist noch eine Stelle übrig, die ich bey dieser Gelegenheit zu berichtigen mir um desto weniger verbieten kann, da sie einen Fehler enthält, welcher, obschon ein wahrer Druckfehler, doch in dem Verzeichnisse derselben durch Zufall ausgelassen worden, und so beschaffen ist, daſs vielleicht unter den Lesern einer oder der andere, der nicht so glücklich *ex ingenio* zu *emendiren* verstünde, wie der Recensent meiner Uebersezung in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, dabey anstossen könnte. Es steht nämlich S. 45. Z. 12 des 2ten Theils: in *geraden* Gränzen an Statt: in *engen* Gränzen. Wer mir nun zutraut, daſs ich selbst der Urheber dieses Fehlers seye, und wirklich das erste Wort an Statt des lezten geschrieben haben könne, bey dem kann und will ich mich nicht rechtfertigen. Allein, wenn in dem Manuscripte das Wort: *engen* stand, wie war es möglich, solches in: *geraden* zu verwandeln? Was konnte wohl dem Sezer zu einer so abentheuerlichen Verwechselung Gelegenheit geben? Darüber kann ich nur eine Conjectur beybringen, die aber für mich völlig befriedigend ist. Gerade vor zehen Jahren erzählte mir der verstorbene Abt Hemmer zu Mannheim, da, aus Gelegenheit der, mit ausnehmender Schönheit und

Sorgfalt gedruckten Abhandlungen der dortigen meteorologischen Societät von den Druckfehlern in mathematischen Werken die Rede wurde, er habe einmal eine Abhandlung drucken lassen worin die Worte: „ein — — — *angemessenes Verhältniſs*“ in diese: „ein — — — *abgeseztes* Verhältniſs“ verwandelt worden seyen. Bey der Revision des Abdrucks habe er sich die Entstehung dieses Fehlers nicht zu erklären gewuſst, bis er bemerkt habe, daſs eine Zeile des Abdrucks die erste Hälfte des Worts: *abgeseztes* zum Ende, die folgende Zeile aber die andere Hälfte eben dieses Worts zum Anfange gehabt hätte. Diese Bemerkung habe ihn auf die Vermuthung gebracht, die Vorstellung des hier nothwendigen *Absezens* könnte wohl die ganze Aufmerksamkeit des Sezers ein Paar Augenblicke beschäftigt, und ihn dadurch verleitet haben, an Statt des Worts: *angemessenes* das Wort: *abgeseztes* zu sezen. Er habe hierauf den Sezer selbst darüber befragt, und von ihm die Antwort erhalten, daſs er für seinen Theil von der Richtigkeit dieser Vermuthung vollkommen überzeugt wäre.

Von dieser Anekdote mache ich auf meinen Fall folgende Anwendung: Auf eine ganz ähnliche Art konnte die Vorstellung, daſs das Wort: *eingeschloſsen* gerade noch auf die 12te Zeile hingehe, oder sie *gerade ausfülle*, die Aufmerksamkeit meines Sezers, als *idea fixa*. auf einige Augenblicke so ganz beschäftigen, daſs er dadurch verleitet wurde, das Wort *engen* in *geraden* zu verwandeln. Was dieser Ver-

muthung noch mehr Wahrſcheinlichkeit giebt, iſt die Bemerkung, die ſich ganz ungeſucht darbietet, daſs in dem Worte: *eingeſchloſſen*, beſonders gegen dem Ende zu, die Buchſtaben merklich näher zuſammengedrängt ſind, als in allen übrigen Wörtern jener Zeile, woraus das Bemühen, dieſes Wort gerade noch in die Zeile zu bringen, deutlich hervorleuchtet. Daſs aber dieſer Irrthum unter den Druckfehlern nicht angezeigt wurde, rührt daher, daſs ich die Reviſion des Abdrucks von dieſem und einigen der folgenden Bogen, um die Druckfehler aufzuſuchen, nicht ſelbst beſorgen konnte.

Indeſſen machen, nach dem Urtheile des Hrn. M. v. Z. ſelbſt die von ihm gerügten Fehler meiner Ueberſezung, doch nicht den wichtigſten Theil ihrer Unvollkommenheiten aus, ſondern mein gröſstes Verbrechen beſteht vielmehr darin, daſs ich der *Inurbanität*, ja ſogar der *Erbitterung und Empörung* gegen franzöſiſche Gelehrte mich ſchuldig gemacht habe, wie man leicht daraus abnehmen kann, daſs die Rüge der mehrerwähnten Fehler S. 11. der Einleitung zum 3ten Bande der A. G. E. nur beyläufig in einer Anmerkung angebracht, jener Vorwurf der Inurbanität aber S. 8. bis 12. mit viel gröſserer Ausführlichkeit abgehandelt worden iſt. Da es nun gleich auf den erſten Anblick klar iſt, daſs jene Rüge blos durch dieſen Vorwurf veranlaſſet und herbeygeführt worden ſey, und ohne ihn wohl nie erfolgt ſeyn würde, und da überdies dieſer Vorwurf

ſonſt

sonst noch in vielen Rücksichten höchst merkwürdig, ja in einigen sogar ganz einzig ist, so glaube ich um desto eher Nachsicht von meinen Lesern hoffen zu dürfen, wenn ich mir hier die Mühe gebe, ihn in seinem ganzen Zusammenhange und von allen Seiten zu beleuchten. Er lautet seiner ganzen Länge nach S. 8. bis 12. am a. O. wörtlich wie folget:

„Wahrlich! seitdem irgend ein deutscher Ge-„lehrter in einem *grund-gelehrten* Werke gezeigt hat, „daſs die heutigen französischen Gelehrten kein „Griechisch mehr verstehen, weil Gail das griechi-„sche Wort *Thiase* nicht richtig zu erklären wuſste; „oder daſs es keine gründlichen Mathematiker in „Frankreich mehr gebe, seitdem ein deutscher Pro-„fessor, auf einer deutschen Universität bewiesen „hat, daſs La Plaçe ***kauderwelsch*** in seinen Schrif-„ten spricht; so sollte man fast meinen, alle Künste „und Wissenschaften wären auf einmal ausgewandert, „und von Frankreichs Oberfläche verschwunden. „Ganz anders urtheilt aber dennoch ein gewiſs auch „grund-gelehrter Deutscher, welchen selbst die Fran-„zosen, ein La Plaçe, ein La Grange, ein La „Lande dafür gelten lassen. Als ich im vorigen „Jahre das Vergnügen hatte, mich mit Klügel in Halle „über seine Perturbations-Rechnungen und über La „Plaçe's *Théorie de Jupiter et Saturne* schriftlich „zu unterhalten, so bekannte dieser berühmte Geo-„meter unter andern in seinen Briefen an mich, daſs „wir in dieser schweren und kühnen Wissenschaft

„vor den Franzosen die *Knie beugen* müſsten; dieſs
„war der Ausdruck, dessen sich dieser Gelehrte,
„der diese Wissenschaft gewiſs ganz zu übersehen
„und zu beurtheilen im Stande ist, in seinem Schrei-
„ben an mich bediente! Und in der That, wer kann
„dieſs läugnen, der nur einigermassen mit den Fort-
„schritten dieser sublimen Wissenschaft bekannt ist,
„daſs wir, wenn *England* den Vorzug gehabt hat,
„der Entdeckung der allgemeinen Schwere das Da-
„seyn zu geben, die zahlreichsten Entwickelungen
„dieser Entdeckung, die glücklichsten Anwendungen
„derselben, und die Revolution, welche sie in der
„Sternkunde hervorgebracht haben, hauptsächlich
„den *französischen* Geometern, und in *unseren Tagen*
„hauptsächlich den scharfsinnigen und glänzenden
„Bemühungen eines La Place zu verdanken haben.
„Und gegen einen solchen Gelehrten, wie La Plaçe,
„den Newton unserer Zeit, wagte es ein deut-
„scher Professor, das Wort *kauderwelsch* zu gebrau-
„chen, an einer Stelle zu gebrauchen, wo nur ein
„wenig Nachdenken ihn den groben Druckfehler
„hätte finden lassen! Ein Deutscher in Paris le-
„bender, gewiſs auch gründlicher Gelehrte, wie
„ich daraus vermuthe, weil ihn ein La Plaçe sei-
„ner Achtung, seines Vertrauens und seines Um-
„gangs würdig hält, schreibt mir hierüber folgen-
„des:“

„„Lezthin sah ich bey La Plaçe ein Exem-
„„plar der deutschen Uebersezung seiner Ex-

„„position du Systéme du Monde, welche
„„La Lande aus Gotha mitgebracht hatte.
„„Ich war nicht wenig erstaunt und zugleich
„„beschämt, im I. Theil S. 48. eine sehr
„„unhöfliche Note des Uebersezers, und so-
„„gar das unedle Wort *kauderwelsch* zu fin-
„„den; Schamröthe flog mir über das ganze
„„Gesicht; Sie können nicht glauben, wie
„„schmerzhaft mir dieser Mangel an Urbani-
„„tät, und diese . . . . . war; hier, wo
„„man gegen den armseligsten Scribler kein
„„solches Wort hätte drucken lassen, hier,
„„wo man so leicht geneigt ist, einseitige
„„Urtheile über deutsche Sitten und deutsche
„„Gelehrte zu fällen, welche man alsdann
„„mit solchen Beyspielen zu belegen und zu
„„rechtfertigen glaubt! Da La Plaçe nicht
„„deutsch versteht, so werde ich mich wohl
„„hüten, ihm diese Anmerkung zu überse-
„„zen, weil ich als Deutscher doch wünsche,
„„daſs er von seines Uebersezers Urbanität
„„keine so unvortheilhafte Meinung erhalten
„„möge, als er von desselben Scharfsinne er-
„„halten würde.““

Hier folgt alsdann unter dem Texte die Anmerkung: „Auch S. 47. erlaubte sich der Uebersezer eine sehr unmanierliche Anmerkung, wo er „eine französische Redensart des La Plaçe mit „einem *hölzernen Schur-Eisen* (!) vergleicht.“

Diese Anmerkung endigt sich mit der oben schon ausgehobenen und beleuchteten Rüge einiger vorgeblichen Fehler meiner Uebersezung, und dann geht der Text wieder so fort: „Mit wahrem Kummer „und Schmerz bemerken wir, daſs diese literari„sche Erbitterung und Empörung, diese unselige „literarische Seuche, auch den edlen und stolzen „*Britten* ergriffen habe.“

Um bey Beantwortung dieses, in so vielen Rücksichten höchst merkmürdigen Vorwurfs, nichts schuldig zu bleiben, werde ich mich zuerst zur Hauptsache wenden, und wenn diese beseitiget seyn wird, auch die übrigen Nebenumstände mit der nöthigen Ausführlichkeit erörtern.

I. „Ich soll *gegen* La Plaçe das Wort *kau„derwelsch* gebraucht haben, und das an einer Stel„le, wo nur ein wenig Nachdenken mich den gro„ben Druckfehler hätte finden lassen.“

Daſs ich S. 48. in der Anmerkung gesagt habe: „*dieſs ist kauderwelsch*“ ist wahr. Allein es ist nicht minder wahr, daſs ich S. XVI. der Vorrede gesagt habe: „*Bey der Anmerkung auf der* 48. *Seite glaubte ich in der Urschrift einen Druckfehler voraussezen zu müssen; denn die Stelle kann so, wie sie da steht, nicht von La Plaçe herrühren.*“

Mein Argument, in logische Form gebracht, war offenbar dieses:

Diese Stelle ist kauderwelsch;
La Place kann kein kauderwelsch schreiben;
Folglich kann diese Stelle nicht von ihm herrühren.

Nun wäre ich doch äusserst begierig, die Syllogistik kennen zu lernen, nach welcher der Hr. M. v. Z. sich erlauben konnte, mir Schuld zu geben, daſs ich das Wort kauderwelsch *gegen* La Place gebraucht habe.

Daſs ein Theil dieses Arguments in der Vorrede steht, kann dem Hrn. M. v. Z. nicht zur Entschuldigung dienen. Denn 1) kann ich von jedem, der über mein Buch urtheilen will, fordern, daſs er auch meine Vorrede lese; und 2) steht die obenangeführte Stelle auf der lezten Seite der Vorrede, dem Anfange des Buchs gerade gegenüber, also an einem Orte, wo sie jedem, der das Buch selbst zu lesen anfängt, nothwendig in die Augen springen muſs. Ein einziger Blick auf diese Blattseite hätte daher auch dem Pariser Correspondenten des Hrn. Majors sein Erstaunen, seine Beschämung, so wie die ganze dadurch veranlassete Declamation gegen mich, und die Klagen über Mangel an Urbanität und Scharfsinn ersparen können.

II. Noch mehr! „Ich soll sogar auf der Universität, auf welcher ich eine Lehrstelle bekleide, bewiesen haben, daſs La Place in seinen Schriften kauderwelsch spreche."

Daſs der Hr. M. v. Z. zu dieser invidiösen Insinuation keinen andern Grund gehabt habe, als die obenangeführte unschuldige Anmerkung, S. 48. ist aus dem ganzen Zusammenhange klar. Daſs aber diese Insinuation mit dem vorhin (N° I.) beantworteten Vorwurfe nicht einerley sey, erhellet aus folgenden Gründen:

1) Weil durch diese Insinuation, so, wie sie hier ausgedrückt ist, nicht nur bey Leuten, denen es bekannt ist, daſs es selbst heut zu Tage noch, auf gewissen Universitäten Lehrer giebt, welche die Gewohnheit haben, Männer, deren Meinungen sie widerlegen wollen, in Person vor ihre Katheder zu citiren, und sie da zuweilen auf eine nicht sehr höfliche Art zurecht zu weisen, fast nothwendig der Gedanke erwekt werden muſs, ich könnte mich wohl gar einer ähnlichen Thorheit schuldig gemacht, und mir die unselige Mühe gegeben haben, meinen Zuhöhrern auf meinem Katheder zu beweisen, daſs La Plaçe kauderwelsch schreibe, sondern weil auch Leser, die von jener seltsamen Gewohnheit nichts wissen, doch durch das in der erwähnten Insinuation nach dem Worte; *Professor* stehende Komma fast unvermeidlich auf diese Erklärung geführt werden.

2) Weil es himmelweit unterschiedene Dinge sind, zu sagen: „*Dem Manne ist hier eine kauderwelsche Stelle entfallen*,“ und zu sagen: „*Der Mann spricht kauderwelsch in seinen Schriften.*“ Jenes kann

auch dem ſcharfsinnigſten und conſequenteſten Denker einmal, durch eine Geiſtes-Abweſenheit von einigen Augenblicken, begegnen; dieſes hingegen können nur ſolche thun, denen, um mit Platnern zu reden, die Werkzeuge der Phantaſie übergeſchnappt ſind. Traurige Beyſpiele davon geben uns die Schriften eines Berger, Oberreit u. a. m. Wer aber von einem La Plaçe ſo etwas ſagen wollte, der würde damit nur beweiſen, daſs er ſelbſt in die Klaſſe dieſer Unglücklichen gehöre.

III. Aber geſezt, ich hätte das Wort: *kauderwelsch* wirklich, wie mir in No. I. Schuld gegeben wurde, *gegen* La Plaçe gebraucht, wäre denn das ein ſo groſses, ſo unerhörtes Wageſtück, daſs es der Mühe werth wäre, ein ſolches Geſchrey darüber zu erheben?

Herr HofRath Kaeſtner iſt einmal nicht der Meinung; denn Er äuſſerte ſich darüber in einem Briefe vom 27ten May d. J. ſo gegen mich: „Ich habe dem Hrn. v. Z. geſchrieben, ob man „gleich böſe Beyſpiele nicht nachahmen müſſe, ſo „wäre doch La Plaçe'n lange ſo was nicht geſagt, „wie die National-Verſammlung Königen ſagte.“

Da aber der Pariſer Correſpondent des Hrn. Major von Zach das Wort *kauderwelsch* ausdrücklich ein *unedles* Wort nennt, da alſo leicht auch andern wackern Männern früher oder ſpäter Verdruſs darüber gemacht werden könnte, und wir

doch einmal das Wort nicht entbehren können, so hoffe ich keine unnüze Arbeit zu übernehmen, wenn ich die Legitimation dieses Worts gehörig zu deduciren, und es gegen dergleichen Angriffe in Sicherheit zu bringen suche.

Das Wort *kauderwelsch* ist ein *logisches Kunstwort*, das uns unentbehrlich ist, um eine Verbindung von Begriffen oder Säzen zu bezeichnen, die keinen Sinn giebt. Die Franzosen gebrauchen dafür den, von einem unter ihnen vorgekommenen Beyspiele in Concreto hergenommenen, Ausdruck *Galimathias*, der auch häufig von teutschen Schriftstellern, ohne dadurch anstössig zu werden, in gleicher Bedeutung gebraucht wird. So bedient sich z. B. desselben Platner, dem, meines Wissens, niemals Mangel an Urbanität vorgeworfen worden ist, in seiner Logik. Wenn man aber den von den Franzosen angenommenen Ausdruck ohne Bedenken gebrauchen darf, so sehe ich nicht ein, was für Gründe man haben könne, unserm teutschen gleichgeltenden, aber so viel bezeichnenderm Worte, durch das Brandmal des: *unedeln* die Aufnahme in die Sprache gebildeter Menschen zu erschweren. Nur Leute können sich so etwas erlauben, denen nichts schön, groſs und edel ist, wofür sie nicht die Auctorität eines Franzosen aufweisen können.

IV. Aber es ist ganz und gar nicht an dem, daſs die Franzosen eine so übel verstandene Deli-

catesse ausüben, als der Hr. M. v. Z. und sein Correspondent zu ihrer Ehre vorgeben zu müssen glauben.

Unter so vielen Beweisen, die ich dafür beybringen könnte, will ich nur einige auswählen, die mir die A. G. E. selbst ungesucht darbieten.

Im 1ten Bande S. 226. schreibt La Lande: „Br. Paucton - - - hat nichts, als *dummes Zeug* „über das Maas- und Gewicht-System geshrieben, „er darf sich nicht mehr im National-Institute se„hen lassen.“

Und S. 171. des 2ten Bandes schreibt eben dieser Briefsteller: „Paucton, der Verfasser der „Metrologie, ist gestorben, er ist vor Elend um„gekommen, es ist aber zum Theil seine Schuld. „Hätte er nicht *dummes Zeug* gegen das neuere me„trische System geschrieben, so hätte er auf Un„terstützung rechnen können, so aber hat er sich „alle Gelehrten zu Feinden gemacht.“

Ich mache hierbey an den Correspondenten des Hrn. M. v. Z. nur die zwey Fragen:

1) War Paucton jemals ein *armseliger Scribler;* und wenn er das war, wie kam er zu einer Stelle im National-Institute?

2) Wie heiſst wohl das *edle* Wort des französischen Briefstellers, das in der Uebersezung durch *dummes Zeug* ausgedrückt ist?

Ich meines Orts bin eben so sehr davon überzeugt, daſs Paucton's ganzes Verbrechen sich auf

das Wörtchen: *gegen* zurückführen laſse, als ich überzeugt bin, daſs die Erinnerungen eines Kaestner und Klostermann gegen die nämliche Sache in Paris keine edlere oder glimpflichere Benennung werden erhalten haben.

Daſs dies kein aus der Luft gegriffener Argwohn sey, beweise ich mit dem ganz ähnlichen Schicksale, das die *gegen* das antiphlogistische System der Chemie gerichteten Bemühungen eines andern Mitglieds des National-Instituts, des würdigen und gelehrten Lamarck gehabt haben, welchem die erste Klasse dieser Geſellschaft folgende Aeusserungen *) abnöthigte:

„Es wäre dem Intereſſe der Wiſſenschaft ge„mäſs und für mich sehr vortheilhaft gewesen, „wenn meine Grundsäze über die Physik und die „von mir angeſtellten neuen Betrachtungen in die„ser Geſellschaft wären strenge geprüft, und ganz „umständlich erörtert worden. Besonders hofte ich „von der Erörterung, welche die Lesung meiner „Abhandlungen natürlicherweise veranlassen muſs„te, viele Aufklärung, wovon ich mir groſsen Ge„winn versprach.

„Aber ich habe mich in meiner Erwartung gar „sehr betrogen, und die Wirkung meiner Vorle„sungen in der ersten Klasse des National-Instituts „war eine ganz andere, als ich hätte denken sollen.“

(*) Mémoires de Physique et d'histoire naturelle. Paris 1797. p. 408. ſq.

„Ohne Zweifel ist dem Leser wenig daran ge-„legen, von der Behandlung Nachricht zu erhal-„ten, die ich bey dieser Gelegenheit erfahren „habe, von der Verachtung und feindseligen Zu-„rückstossung, womit mir die herrschenden und „eingenommenen Glieder dieser Klasse begegneten, „endlich von der beharrlichen Verweigerung der „Chemisten, auch nur *eine* von den in meinen Ab-„handlungen vorgelegten Fragen zu erörtern, un-„geachtet solche gröſstentheils ganz neu waren.„

„Ich sage daher nichts weiter davon, als daſs „ich, sobald ich bemerkte, daſs meine Vorlesun-„gen, deren Zusammenhang man in den Sizungen „unter mancherley Vorwand unterbrach, meinen „Collegen lange Weile zu machen, und unange-„nehm zu seyn schienen, da meine Absicht kei-„neswegs war, jemanden unhöflich zu begegnen, „oder ihn zu kränken, sogleich aufhörte, um die „Fortsezung derselben mich zu bemühen, so daſs „ich nicht einmal die Vorlesung der bereits ange-„fangenen vierten Abhandlung beendigte.“

„Jezt lege ich in diesen Abhandlungen dem „vorurtheilfreyen und uneingenommenen Theile „des Publicums das Resultat meiner Untersuchun-„gen über die Physik und die Gründe der von mir „herausgegebenen Widerlegung der Theorie der „neueren Chemisten vor. Vielleicht wird dieser „Theil des Publikums nicht sagen, wie diese Che-„misten ihn gerne glauben machen wollten, daſs

„alles darin *ſo ungereimt* (d'une *abſurdité*) ſey, daſs „es gar keine Aufmerkſamkeit verdiene.“

„Uebrigens unterwerfe ich dieſe Gegenſtände „unbedingt ſeinem Urtheile, und erkläre ſchlecht- „hin, daſs mein Abſehen dabey auf nichts gerich- „tet geweſen ſey, als auf das Intereſſe der Wahr- „heit, und die Hofnung, der Aufnahme der Wiſ- „ſenſchaften nüzlich zu ſeyn.“

Dies iſt, nach *meinen* Begriffen, die Sprache des *edeln* Mannes; wer hingegen auf Seiten des National-Inſtituts Worte oder Handlungen hier *edel* finden kann, der mag mir's verzeihen, wenn ich ihm geradezu erkläre:

Vetabo, ſub isdem ſit trabibus,
Fragilemve mecum ſolvat phaſelon!

V. Der zweite Grund, warum der Hr. M. v. Z. mir Inurbanität zur Laſt legt, iſt der, weil ich mir erlaubt habe, eine franzöſiſche Redensart des La Plaçe mit einem *hölzernen Schur-Eiſen* zu vergleichen; welches der Hr. Major eine ſehr *unmanierliche* Anmerkung zu nennen beliebt hat.

Daſs ich S. 47. des 1ten Theils meiner Ueber- ſezung geſagt habe, *ein zunehmender Mond, welcher abnimmt*, (*un croiſſant, qui diminue*) ſey, genau zu reden, ein *hölzernes Schur-Eiſen*, iſt wahr, und es wird mir daher obliegen, zu beweiſen 1) daſs dies der eigentliche Ausdruck für das ſey, was ich bezeichnen wollte, 2) daſs dieſer Ausdruck nicht unmanierlich ſey.

Daſs der Ausdruck: *hölzernes Schur-Eisen* — die wörtliche Uebersezung des σιδηροξυλον der Griechen — in den Schulen der Philosophen seit Aristoteles gebraucht worden sey, um eine Zusammensezung von Begriffen zu bezeichnen, die einander aufheben, wozu in der spätern logischen Kunstsprache auch die Benennung: *Contradictio in adjecto* diente, habe ich schon auf der Schule gelernt. Jener Ausdruck ist also, so gut, wie dieser, ein ächtes *logisches Kunstwort*, und er unterscheidet sich von diesem blos darin, daſs dieser die Sache *in abstracto* bezeichnet, da jener auf eine ähnliche Art, wie der Ausdruck: *Galimathias*, von einem Beyspiele *in concreto* hergenommen ist. Daſs nun ein zunehmender Mond, welcher abnimmt, eine solche Zusammensezung sey, bedarf wohl keines Beweises. Sobald aber dieses ausgemacht ist, so ist eben damit auch ausgemacht, daſs ein *hölzernes Schur-Eisen* der eigentliche Ausdruck dafür sey.

Was nun die *Unmanierlichkeit* dieses Ausdrucks betrift, so könnte ich die Verantwortung derselben füglich den ersten Urhebern des Worts σιδηροξυλον, nach welchen der teutsche gleichgeltende Ausdruck gebildet worden ist, überlassen, und ich fürchte eben nicht, daſs der erste Lehrer der Rede- und Dichtkunst über einer solchen Ausforderung in groſse Verlegenheit gerathen würde.

Da indessen doch auch der Recensent meiner Uebersezung in der A. L. Z. an den beyden Ausdrücken: *Kauderwelsch* und *hölzernes Schur-Eisen* sich gestossen und sie weggewünscht hat, so halte ich es, um der Wahrheit und der wissenschaftlichen Sprache willen, für sehr der Mühe merth, die Quelle, aus welcher eine so ungerechte Strenge gegen diese und ähnliche Worte herfliessen konnte, aufzusuchen, und die irrigen Vorstellungen, auf welche solche sich gründet, zu berichtigen.

Das Wort *Urbanität* bezeichnet ursprünglich die Sitten der Städter überhaupt, wie solche in Reden und Handlungen sich äussern, und daher in der zweyten eingeschränkteren Bedeutung den *Ton der guten Gesellschaft.* Urbanität in Reden und Schriften bezeichnet demnach insbesondere die *Sprache der guten* oder *gebildeten Gesellschaft.*

Daſs man jenen Ton überhaupt, oder diese Sprache insbesondere sich nicht anders eigen machen könne, als dadurch, daſs man an guter Gesellschaft selbst Theil nimmt, und mit Menschen -- gleichviel, lebenden oder verstorbenen -- die jenen Ton und diese Sprache führen, Umgang pflegt, und ihr Benehmen beobachtet, folgt hieraus von selbst. Bey diesem Beobachten aber kann man auf zwey verschiedene Arten zu Werke gehen. Entweder man kann blos sehen und hören, und das Gesehene und Gehörte sich merken; oder man kann mit dem Sehen und Hören auch Nachdenken über die Gründe des

Gesehenen und Gehörten verbinden, und diese Gründe aufsuchen, um das Wahre und Brauchbare davon in das System seiner Lebens-Weisheit aufzunehmen. Wer jenen Weg einschlägt, der wird, auch durch einen viele Jahre lang fortgesezten Umgang mit der gebildetsten Gesellschaft, doch nicht mehr lernen, als: „*Diese oder jene Worte und Handlungen werden für urban gehalten, oder führen das Prädicat der Urbanität.*“ Wer hingegen diesen Weg geht, der wird in sehr kurzer Zeit schon zu dem Resultate gelangen: „*allen Worten und Handlungen, die diese oder jene Eigenschaft haben, kommt, vermöge ihres Verhältnisses zu den Gesezen der gebildeten Gesellschaft, das Prädicat der Urbanität, den entgegengesezten aber das entgegengesezte zu.*“ Jener wird, da ihm doch, auch bey der längsten Erfahrung, nie alle Worte und alle Handlungen vorkommen können, in tausend Fällen der Anwendung ungewiſs, und der Gefahr sich zu verirren, blosgestellt seyn, dieser hingegen in allen vorkommenden Fällen mit gleicher Richtigkeit und Sicherheit entscheiden können.

Wenn jener immer von aussen abhängt, und, so oft er seinen Aufenthalt verändert, an jedem neuen Orte wieder fragen muſs: „*Was wird da für urban gehalten, und was nicht?*“ so hängt dieser immer nur von sich selbst ab, und bestimmt immer und überall: „*Was soll oder muſs vernünftigerweiſe allgemein dafür gehalten werden?*“ Für diesen ist kein Gesez gegeben, als das Gesez der Vernunft,

und von den Regeln jeder Gesellschaft können nur die auf seine Achtung Ansprüche machen, welche, vernünftige Gründe für sich haben. So bestimmt und berichtigt er durch seinen Ton überall den Ton der guten Gesellschaft, und erscheint als Repräsentant der gesezgebenden Vernunft, überall als selbst gesezgebend; wie könnte also jener, der keine andere Richtschnur, als Observanz und Etikette kennt, der folglich den Gesezen von diesem ewig unterworfen bleibt, sich zum Richter von diesem aufwerfen, ohne die Ordnung der Dinge umzukehren?

Gerade dieser Unterschied ist es, welcher, nach meinen Begriffen, zwischen dem feinen Weltmanne und dem wissenschaftlich gebildeten Gelehrten im strengen Verstande (*ingenium literarum cultu subactum*) Statt findet. Jener, wenn er Jahre lang am Hofe lebt, oder sonst sein Umgang blos auf Personen aus der grofsen Welt eingeschränkt ist, wird leicht dahin kommen, endlich alle Worte und Vergleichungen, die blos von Gegenständen des gemeinen Lebens hergenommen sind, dergleichen in seinem Kreise wenig oder gar nicht vorkommen, für inurban, unmanierlich, unedel zu halten; Dieser hingegen wird jedes Wort in ästhetischer und moralischer Hinsicht nicht minder, als in grammatischer, nach allgemeinen Gründen würdigen, und nach dem Ausschlage dieser Würdigung den Gebrauch desselben sich verstatten oder verbieten, und so wird sein Ton immer das Resultat seiner wissenschaftlichen

Grund-

Grundsäze seyn, während der Ton von jenem blos das Resultat seiner eingeschränkten Erfahrungen über Observanz und Etikette ist.

Der *Weltmann* mag also immerhin seinen Ton modeln, wie es ihm beliebt, so wird sich der *Gelehrte* *) wenig darum bekümmern, so lange er das Gebiet der Wissenschaften mit keinen Streifzügen bedrohet. Sobald aber dies geschieht, und er dem lezten Geseze vorzuschreiben sich anmaſst, oder ihm zu entreissen sucht, was nicht blos durch lange unbestrittenen Besiz und Verjährung, sondern nach unumstöslichen Rechtsgründen ihm eigenthümlich gehört, dann ist es Zeit, daſs dieser seine Rechte gegen jenen geltend mache, und ihn in seine natürlichen Gränzen zurückweise.

In diesem Falle befinde ich mich gegenwärtig dem Hrn. M. v. Z. gegenüber. Mein Recht auf die angefochtenen Ausdrücke: *kauderwelsch* und *hölzernes Schur-Eisen* glaube ich genugthuend erwiesen zu haben; ich habe also jezt nur noch zu zei-

(*) Der *Weltmann* und der *Gelehrte* werden hier einander in dem vorhin *bestimmten* Sinne entgegengesezt, worin sich der Weltmann von dem, von Kindheit an zum Gelehrten bestimmten, und durch eine, so viel als möglich, gleichförmige Ausbildung aller Seelenkräfte dazu vorbereiteten, Manne immer, und auch selbst dann noch, sehr wesentlich unterscheidet, wenn er gleich in diesem oder jenem *einzelnen Theile* der Gelehrsamkeit groſse, ja sogar ausgezeichnete und seltene Kenntnisse sich erworben hat.

* * *

gen, daſs auch der Vorwand nicht Statt finden könne, unter welchem der Hr. Major sie in Anspruch nahm, d. h. daſs der Vorwurf der Inurbanität sie nicht treffe.

Zu dem Ende muſs zuerst der Begriff der Urbanität und Inurbanität genauer bestimmt werden.

Das oberste Gesez der Vernunft in Beziehung auf unsern mündlichen und schriftlichen Umgang mit andern ist: „*Beleidige niemand durch Worte auf irgend eine Weise!*“ Man kann aber einen andern durch Worte auf zweyerley Art beleidigen; 1) *absichtlich*, 2) *zufällig*. Die absichtlichen Beleidigungen verstossen gegen die *Geseze der Sittlichkeit*, die zufälligen gegen die *Sittenregeln*. Nur die lezteren kommen hier in Betrachtung. Die Sittenregeln können also vernünftigerweise nur solchen Worten und Ausdrücken die Aufnahme in gute Gesellschaft versagen, die irgend ein Mitglied der Gesellschaft zufällig und ohne seine Schuld beleidigen könnten.

Nun kann man aber einen andern nur dadurch mit Worten zufällig beleidigen, daſs man zu Bezeichnung einer Sache Worte wählt, die entweder für sich selbst, oder durch Neben-Ideen, die sie nach den Associationsgesezen herbeiführen, unangenehme Empfindungen oder Vorstellungen erwecken, da man doch durch andere Worte, die diese Folgen nicht gehabt hätten, die nämliche Sache hätte ausdrücken können. Folglich macht man

ſich der Inurbanität, im Reden und Schreiben nur dadurch ſchuldig, daſs man, ohne Noth, Worte gebraucht, die, für ſich ſelbſt, oder durch die Neben-Ideen, welche ſie veranlaſſen, unangenehme Empfindungen oder Vorſtellungen erwecken. Man halte nun an dieſen Begriff, als einen ſicheren Prüfſtein, die Ausdrücke: *kauderwelſch* und *hölzernes Schur-Eiſen*, und entſcheide, ob ſie den Vorwurf der Inurbanität verdienen.

Zur weiteren Erläuterung und Beſtättigung des bishergeſagten können folgende Beyſpiele dienen.

Tycho Brahe, als er mit Kaiſer *Rudolph* in ſeinem Wagen fuhr, wagte es nicht, dieſem ein Bedürfniſs zu entdecken, das auch der Kaiſer mit dem Bettler gemein hat, und zog ſich dadurch den Tod zu. Nach den Begriffen von Urbanität, die ſelbſt jezt noch an manchen Höfen herrſchen, war *Tycho* gewiſs das gröſste Muſter dieſer Tugend, und ſein Märtyrer-Tod wird in den Jahrbüchern der Hof-Etikette eben ſo merkwürdig bleiben, als ſein Leben in denen der Aſtronomie.

Erſt noch im Winter des Jahrs 1782 zog ſich ein podagriſcher Miniſter an einem teutſchen Hofe dadurch den Tod zu, daſs er es nicht wagte, die Kirche, die er in Geſellſchaft ſeines Hofs an einem der kälteſten Tage dieſes Jahrs, einer Feyerlichkeit wegen, beſucht hatte, zuerſt und vor Endigung des Gottesdienſtes zu verlaſſen. Ein ähnliches Beyſpiel höfiſcher Urbanität!

An mehreren Höfen und in vielen Städten Teutschlands, die eben nicht zu den kleinsten gehören, wird es, selbst heut zu Tage noch, für äusserst inurban gehalten, von den Füssen oder Schuhen zu sprechen, ohne eine Deprecationsformel, wie: „*mit Respect zu melden*,“ oder: „*salva venia*“ voranzusezen. Als daher des berühmten Camper's Abhandlung *von der besten Form der Schuhe* in solche Oerter kam, so muſste man sich nothwendig sehr daran stossen, daſs ein so gelehrter Mann es gewagt habe, über ein so gemeines und verächtliches Ding, sogar zu schreiben, ohne jene Höflichkeitsregel zu beobachten.

Der ehemalige verdienstvolle Tübingische Professor Kies, der auch ein groſser Astronome, aber auch noch etwas mehr, war, fieng einmal seine Vorlesungen über die reine Mathematik mit dem Saze an: „*Erbsen kann man nicht haspeln*,“ um seinen Zuhörern den Unterschied der discreten und continuirlichen Gröſsen anschaulich zu machen.

Wie mancher höfische Zelote, wenn er das gehört hätte, würde mit Indignation ausgerufen haben: „*Pfuy des inurbanen Mannes! gehören so gemeine Dinge, wie Erbsen und Haspeln, auch auf einen philosophischen Katheder?*

Sollen nun die Gelehrten aus solchen Beyspielen und Urtheilen lernen, was Urbanität sey?

Im Gegentheile glaube ich es als einen nicht ganz unerheblichen Grund für die Richtigkeit mei-

ner obigen Darstellung ansehen zu dürfen, daſs der französische Minister Reinhard, der überhaupt, so wie der verstorbene Lichtenberg und mehrere noch lebende verehrungswürdige Männer unter den ersten Gelehrten Teutschlands, deren Urtheile anzuführen die Bescheidenheit mir nicht erlaubt, mit meiner Uebersezung vollkommen zufrieden war, die von dem Hrn. v. Z. so bitter getadelten Ausdrücke durchaus nicht anstössig gefunden habe, wie ich nicht nur aus seinen Aeusserungen über meine Arbeit überhaupt, sondern auch besonders aus dem Umstande schliessen muſs, daſs er, ein ganzes Jahr, nachdem er den 1ten Theil meiner Uebersezung erhalten hatte, ehe er seine Reise nach Florenz antrat, noch von der schwäbischen Gränze aus mich auffoderte, ein Exemplar meiner Uebersezung an La Plaçe nach Paris zu schicken, weil er ihm solches bey seinem lezten Aufenthalte daselbst versprochen hätte. Daſs aber dieser Mann hier eine Stimme habe, werde ich nicht zu beweisen brauchen, da ich wohl von jedem meiner Leser so viel Billigkeit erwarten kann, daſs er dem Uebersezer *Tibull's* zutrauen werde, daſs er Teutsch, dem Mitgliede des National-Instituts, daſs er Französisch verstehe, und dem Minister, der die lezten sechs Jahre seines Lebens in Unterhandlungen mit den Höfen zu Londen, Neapel, Florenz und mit den teutschen Hansestädten zugebracht hat, daſs er nicht erst aus den A. G. E. lernen müsse, was Urbanität sey. Der Grund, war-

um dieser Mann an jenen Ansdrücken keinen Anstos nahm, lag ohne Zweifel theils darin, daſs bey ihm die sorgfältige und vollständige Bildung des wissenschaftlichen Gelehrten im strengen Verstande der Bildung des Weltmanns vorangegangen ist, und ihn gegen Verirrungen dieser Art verwahrt hat, theils darin, daſs er durch seinen langen Aufenthalt in Frankreich doch nicht in einen französirenden Teutschen verwandelt worden ist, sondern den Charakter der *teutschen Geradheit*, wovon das *Scapham Scapham adpellare* einen Grundzug ausmacht, bis diese Stunde glücklich behauptet hat.

Ich weiſs indessen sehr gut, daſs es Leute giebt, die schwach genug sind, jede noch so anständige, aber freymüthige Darlegung der nackten Wahrheit, jede Bezeichnung einer in irgend einer Hinsicht unrühmlichen oder unangenehmen, Sache, mit dem eigentlichen Namen, wenn gleich die Sprache keinen andern dafür hat, für beleidigend aufzunehmen. Ich weiſs auch, daſs es schon zu *Plutarchs* Zeiten solche gegeben hat, und kann mit der höchsten Wahrscheinlichkeit voraussehen, daſs ihre Klasse wohl nie aussterben werde. So viel Recht ich nun, nach der obigen Darstellung, auch hätte, diese, in Ansehung aller Beleidigungen dieser Art, worüber sie sich beklagen möchten, mit der Antwort abzufertigen, „daſs sie solche einzig auf die „Rechnung ihrer eigenen Schwäche zu schreiben „hätten," so will ich doch lieber ihnen die Freu-

de machen, vor jedem Gerichtshofe, wo sie etwa gegen mich ähnliche Klagen führen mögen, das naive „Bekenntniſs, das man schon bey dem vornannten Philosophen findet, zu dem meinigen zu machen: σκαιος και ἀγροικος ἐιμι, και την σκαφην σκαφην λεγω (*Ich bin eben ein tölpischer und angeschliffener [inurbanus] Mensch, und nenne den Kahn, Kahn.*

Um aber diesen Leuten doch an einigen Beyspielen zu zeigen, was *wahre Inurbanität* sey, so wähle ich dazu einige Stellen aus einer sehr selten gewordenen Schrift des ehemaligen verdienstvollen Tübingischen Professors Wilhelm Schickhardt, welche den Titel führt: *Kurze Anweisung, wie Künstliche Landtafeln auſs rechtem Grund zu machen, und die bißher begangene Irrthumb zu verbessern, Sampt etlich New erfundnen Vörtheln, die Polushöhin auffs leichtest, und doch scharpff gnug zu forschen.* 1629. 4; und wo der Verfasser S. 4 über die Fehler der Karten von Teutschland sich so ausdrückt: „Zwar sind derselben so vil, wie die „Durschlecht (Pocken) an eim kranken Kind, „dessen Leiblin ganz mit Blattern überzogen, „daſs ich schier nicht weiſs, wo ichs ohngeschmerzt „anrühren soll.

S. 8. fährt er fort: „Vnd also fort an, deſs „Irrthums ohnendlich vil, daſs einer, nach dem „Sprüchwort, deſs *Augiae* Kuhställ, (darinn 3000 „Ochsen etlich Jahr lang gestanden haben) leichter „auſsmisten solt, als disen Vnraht seubern?

"Ebendaselbst weiter unten: „Was man einem „Ort gibt, das nimmt man dem andern: gleichwie „die besudelte Kinder, wenn sie das Hemmetlin „(Hemdchen) auffheben, damit sies Gesicht be„decken."

Diese Flecken sind übrigens keineswegs von mir ausgehoben worden, um auf die Verdienste des würdigen Verfassers überhaupt oder den Werth der angeführten Schrift ins besondere einigen Schatten zu werfen. Vielmehr traue ich meinen Lesern zu, daſs sie desto eher geneigt seyn werden, solche mit dem Zeitalter des Verfassers zu entschuldigen, wenn ich ihnen versichere, daſs die vielen guten und richtigen Bemerkungen desselben über die Fehler der Landkarten, und die zum Theile vortreflichen Vorschläge zu deren Verbesserung, auch jezt noch, nach so vielen, von Seiten der Hülfsmittel unvergleichbar vollkommeneren Arbeiten über diesen Gegenstand, ernstliche Beherzigung verdienen, und daſs niemand jene Schrift aus der Hand legen werde, ohne, für den wackeren Mann, der, in jenen Zeiten, mit so geringen Hülfsmitteln, und in einer so wenig aufmunternden Lage, so viel leistete, mit Hochachtung erfüllt zu werden.

Wahre Inurbanität ist es, nach dem oben vestgesezten Begriffe, ferner, wenn man da, wo man über *Sachen* urtheilen sollte, auf die *Personen* abspringt, von welchen diese Sachen herkommen,

und jeden Tadel, wozu diese etwa Gelegenheit geben mögen, auf jene überzutragen bemüht ist. Diese unselige literärische Seuche, die leider! so viele Recensenten angesteckt hat, ist die fruchtbarste Quelle so vieler ärgerlichen Zänkereyen in der literärischen Welt, welche nur gar zu oft keinen andern Erfolg haben, als den, daſs der uneingeweihete Zuschauer dadurch zu einem ähnlichen Fehler verleitet wird, indem er darin Anlaſs findet, einen Theil der Verachtung auf die Wissenschaften selbst zu werfen, womit er ihre Priester und Pfleger, wegen ihres Benehmens bey solchen Streitigkeiten ansehen muſs. Ein merkwürdiges Beyspiel von Inurbanität dieser Art wird sich gewiſs hier allen meinen Lesern von selbst darbieten, ohne daſs ich deſswegen nur ein Wort hinzuzusezen nöthig hätte.

Nachdem nun, durch das bisher Gesagte, die Hauptsache des mir gemachten Vorwurfs der Inurbanität, wie ich glaube, gehörig beleuchtet und genugthuend beantwortet ist, so wende ich mich zur Erörterung der merkwürdigsten Neben-Umstände desselben, wohin ich folgende rechne:

I. Durch das Verbrechen der Inurbanität, dessen ich mich schuldig gemacht haben soll, hält sich der Hr. M. v. Z. für berechtiget, mir eine *literärische Erbitterung und Empörung* gegen französische Gelehrte zuzurechnen.

In Betreff dieses Punkts kann ich nicht unbemerkt lassen, daſs ich ihn als ein merkwürdiges Seitenstück zu jener wichtigen Entdeckung eines müssigen Correspondenten des Leipziger Allgemeinen literärischen Anzeigers ansehen muſs, der in dem Umstande, daſs ich dem französischen Minister Reinhard meine Uebersezung von La Place's Werke dedicirt hatte, einen Beweis von der *erfolgten Wiederherstellung des guten Vernehmens zwischen teutschen und französischen Gelehrten* gefunden zu haben glaubte. Nur fällt, wenn man zwischen der Logik beyder Schriftsteller eine Vergleichung anstellt, solche offenbar zum Vortheile des Lezteren aus.

II. Was das *Kniebeugen* vor den französischen Astronomen betrift, das der Hr. M. v. Z. in Teutschland einzuführen, so angelegentlich bemüht ist, und wofür Er sogar die Auctorität eines Klügel anführt, so schmeichle ich mir mit der herzerhebenden Hoffnung, daſs es dazu so bald noch nicht kommen werde. Ich kenne gewiſs die gesammte mathematische Literatur der Franzosen wie der Teutschen so weit, daſs ich darüber urtheilen kann. Aber so lange die Lehrstühle der Mathematik und Physik auf den vornehmsten teutschen Universitäten gröſstentheils noch mit Männern, wie gegenwärtig, besezt sind, so lange Teutschland noch Liebhaber, wie Schroeter, Olbers, Tempelhof u. a. m. aufweisen, und so lange

es an auswärtige Staaten noch Männer wie Herschel, Schubert, Klostermann, Kraft u. a. m. abgeben kann, so wüſste ich eben nicht, was die Teutschen zu einer solchen Art von Devotionsbezeugung gegen die Franzosen bestimmen könnte. Ich, meines Orts, erkläre ein- für allemal freymüthig, daſs ich meine Knie vor keinem Sterblichen beugen werde, wenn er auch in der That *Director des Himmels und der Erde* wäre, wie Hr. Geh. Rath Baldinger den *Director der Seeberger Sternwarte* im Scherze zu nennen pflegt. Wenn ich, als freyer teutscher Mann, einem andern freyen und selbstständigen Manne, er gehöre zu welcher Nation er wolle, meine Hochachtung bezeigen will, so nehme ich vor ihm den Huth ab; das Kniebeugen aber überlasse ich den morgenländischen Sklaven und jenen bucklichten Lastthieren, die von ihnen dazu abgerichtet werden.

III. Kann ich nicht unterlassen meine Leser auch auf die Periode aufmerksam zu machen, womit der Hr. M. v. Z. den Uebergang von seinem Thema: *Darstellung und Anpreisung der Vorzüge seiner Zeitschrift*, auf meine *Inurbanität* gemacht, und den Angriff gegen mich begonnen hat: „Wahrlich! seitdem - - - verschwunden.“

Ich muſs aufrichtig gestehen, daſs mich meine ganze Hermeneutik -- und ich habe sie in der Schule eines Schnurrer und Storr gelernt -- bey dieser Periode verlassen habe, und nicht vermögend ge-

weſen ſey, mir zur Entdeckung des Sinns derſelben zu verhelfen. Um einen Sinn in dieſe Periode zu bringen, iſt man ſchlechterdings genöthiget, nicht nur die Stellung der Worte, ſondern auch einige Worte ſelbſt zu ändern, und entweder ſo zu leſen: „und daſs es keine gründlichen Mathematiker „mehr in Frankreich gebe, weil ein Deutſcher Pro„feſſor auf einer Deutſchen Univerſität bewieſen „hat, daſs La Plaçe Kauderwelſch in ſeinen Schrif„ten ſpreche;“ oder ſo: „oder, ſeitdem ein Deut„ſcher Profeſſor auf einer Deutſchen Univerſität „bewieſen hat, daſs es keine gründlichen Mathema„tiker mehr in Frankreich gebe, weil La Plaçe „Kauderwelſch in ſeinen Schriften ſpreche.“

Da aber, bey der einen Aenderung wie bey der andern, die Frage nach dem Beweiſe des vorgegebenen Factums eintritt, den der Hr. M. v. Z. wie man leicht ſieht, nie führen kann, ſo darf ſich der Leſer auch nicht herausnehmen, durch Unterſchiebung einer von jenen beyden Leſearten, Ihn für die eine oder andere Behauptung verantwortlich zu machen, und muſs daher ſchlechterdings alle Hoffnung aufgeben, aus dieſer Periode jemals einen verſtändlichen Sinn heraus zu bringen.

Wenn nun diejenigen von meinen Leſern, die etwa Luſt haben, ihre hermeneutiſche Kunſt an dieſer Periode zu verſuchen, weil ſie nicht gewohnt ſind, dergleichen unſchickliche Ideen-Verbindungen

gelten zu lassen, *) damit nicht glücklicher, als ich, seyn, und sich ebenso, wie ich, überzeugen sollten, daſs hier eine *Verbindung von Sätzen* zu finden sey, *die keinen Sinn giebt*, und es wäre etwa einer unter ihnen, der zur Bezeichnung einer solchen Verbindung ein *urbanes* Wort wüſste, als das, wovon ich oben gezeigt habe, daſs es dazu eigentlich bestimmt sey; so will ich recht angelegentlich um dessen Mittheilung bitten, weil der oben angegebene Ausdruck dem Hrn. M. v. Z. so verhaſst ist, und ich, so lange ich es vermeiden kann, auch nicht einmal zufällig, jemanden eine unangenehme Empfindung verursachen mag.

IV. Wenn es mir, wie ich nicht zweifle, gelungen ist, meine Leser davon zu überzeugen, daſs der von dem Hrn. M. v. Z. mir gemachte Vorwurf der Inurbanität mit allen seinen Folgen sich einzig auf das Vorgeben gründe, daſs ich das Wort *kauderwelsch gegen* La Place gebraucht habe, und daſs dieses Vorgeben eine grundlose Erdichtung sey, da ich das gerade Gegentheil mit deutlichen Worten gesagt habe; so werden sie Mühe haben zu begreiffen, wie ein Mann dazu kommen konnte, eine solche Kritik aufzustellen, der S. 53. der Einleitung zum 1ten Bande seiner Zeitschrift, die *strengste Wahrheitsliebe und Unpartheylichkeit im Urtheile* feyerlich gelobt, der S. 5. der Einleitung zum 3ten Bande eben die-

---

(*) S. Platners Phil. Aph. I. Th. §. 405. Ausg. v. 1784.

ser Zeitschrift, dieses Gelübde eben so feyerlich wiederholt, und durch die S. 6. hinzugesezte nachdrückliche Versicherung: „*Wir haben keine Partey,* „*als die, welche jeder rechtschaffene und ehrliebende* „*Mann haben muſs, die der Wahrheit und Gerechtig-* „*keit*“ wo möglich, noch bindender gemacht hat. Noch schwerer wird es ihnen werden zu begreifen, wie dieser Mann dazu kommen konnte, eine solche Kritik — nicht etwa in einer Recension meiner Uebersezung, oder der Urschrift, sondern — an einem Orte aufzustellen, wo er so wenig Veranlassung dazu hatte, daſs er nur durch den allergezwungensten Uebergang vermittelst einer Periode darauf kommen konnte, die ihm gänzlich und in einem so unverbesserlichen Grade miſslungen ist, daſs es schlechterdings unmöglich ist, einen verständlichen Sinn aus ihr, so, wie sie ist, herheraus, oder durch irgend eine zulässige Abänderung in sie hinein zu bringen. Ganz unbegreiflich wird es ihnen endlich seyn, wie dieser Mann dazu kommen konnte, — nicht etwa einen ihm ganz fremden und unbekannten, sondern — einen ihm schon seit fünf Jahren persöhnlich bekannten Mann, der mit ihm in Verhältnissen gestanden, ja, den er seinen Freund genannt hat, auf solche Art zu behandeln.

V. Wenn aber schon dieses meinen Lesern unbegreiflich seyn müſste, was werden sie dann erst denken, wenn ich über das alles noch behaupte, daſs

der Hr. M. v. Z. die bisher beleuchtete Kritik *gegen seine eigene beſsere Ueberzeugung* niedergeschrieben haben müsse. Ich muſs diese harte Beschuldigung beweisen; hier sind meine Gründe:

1) Hätte der Hr. M. v. Z. meine Uebersezung wirklich so schlecht gefunden, wie er sie in der obigen Kritik darstellt, und enthielte sie wirklich Beweise genug von meiner Unkunde in der französischen Sprache, wie Er dort vorgiebt, so war es seine Pflicht, da Er S. 89 bis 96 des 1ten Bandes der A. G. E. La Plaçe's Werk ausführlich recensirte, und S. 90. den 1ten Theil meiner Uebersezung, als bereits erschienen anzeigte, seine Leser vor einer so schlechten Uebersezung eines so wichtigen Buchs zu warnen, wenigstens ihnen zu sagen, daſs solche ihnen das Original keineswegs ersezen könnte. Daſs die Recension von La Plaçe's Werke den Hr. M. v. Z. selbst zum Verfasser habe, schliesse ich, um von den inneren Gründen nichts zu sagen, daraus, weil, meines Wissens, damals von dem Originale ausser seinem und meinem Exemplare, noch kein anderes nach Teútschland gekommen war, was auch durch den Umstand bestättiget wird, daſs der verstorbene Lichtenberg, wie ich von ihm selbst weiſs, nachdem er sich lange umsonst bemühet hatte, das Original durch eine teutsche Buchhandlung zu erhalten, kaum einige Wochen, ehe er den 1ten Theil meiner Uebersezung erhielt, auch bey dem Hrn. M. v. Z. einen vergeblichen Versuch gemacht

hatte, deſsen Exemplar auf einige Zeit geborgt zu bekommen. Daſs aber der Recensent damals auch den 1ten Theil meiner Uebersezung wirklich vor sich gehabt habe, glaube ich nicht nur daraus, daſs er ihn ausdrücklich als *bereits erschienen*, anführt, sondern auch aus der bestimmten Angabe des Verfaſsers, Verlegers, Druckorts, Formats und der Jahrzahl, wobey allein ein Druckfehler ist, schlieſsen zu dürfen.

2) Wenn meine Uebersezung dem Hrn. M. v. Z. wirklich so sehr misfallen hätte, was konnte Ihn wohl bestimmen, mich einige Monate, nachdem ich Ihm solche übersandt hatte, mit einem so verbindlichen Danksagungsschreiben, wie das unten abgedruckte *) ist, zu erfreuen, das nicht nur keine Spur von Unzufriedenheit über irgend einen Punkt, sondern vielmehr ein deutliches Merkmal seiner gänzlichen Zufriedenheit in der wiederholten ehrenvollen Einladung, als Mitarbeiter an den A. G. E. Theil zu nehmen enthält.

3)

(*) Seeberg, den 12. May 1798.
„Meinen äusserst verbindlichsten Dank statte ich Ihnen „Hochgeehrtester Herr Professor für die Ehre ab, welche „Sie mir durch die Uebersendung Ihrer Uebersezung von „Hrn. de la Plaçe's Werke erzeigt haben."
„Ich habe Ew. schon vor einiger Zeit durch den wür„digen Hrn. Geh. Rath Baldinger (welchem mein Com„pliment gelegentlich zu vermelden bitte,) zum Mitarbeiter „an den Allg. geogr. Ephemeriden einladen lassen. Dürfte „ich diese Einladung wiederhohlen, unter Versicherung „meiner ganzen Hochschäzzung und innigsten Verehrung."

3) Hätte der Hr. M. v. Z. an der Inurbanität der nachher getadelten Ausdrücke sich wirklich schon damals so sehr gestoſsen, so war gewiſs eben hier, da Er mich zur Theilnehmung an seiner Zeitschrift auffoderte, der Ort, wo Er sich, wenigstens in den für diese etwa einzusendenden Aufsäzen eine solche Sprache verbitten, und in Ansehung derselben mich auf sein S. 53. der Einleitung zum 1ten Bande gethanes Gelübde der *möglichsten Anständigkeit und Urbanität im Tone* aufmerksam machen muſste.

4) Wenn meine Uebersezung, wie der Hr. M. v. Z. in der oben angeführten Kritik, mit den Worten seines Pariser Correspondenten, sich ausdrückt, so sehr dazu geeignet ist, „*einseitigen Urthei*„*len der Franzosen über Deutsche Sitten und Deutsche* „*Gelehrten zum Belege und zur Rechtfertigung zu die*„*nen,*" wie kam Er denn dazu, selbst die Veranstaltung zu treffen, daſs diese Uebersezung durch seinen Freund La Lande dem Verfasser des Originals eingehändiget würde, und das mit einer so zuvorkommenden Güte zu thun, daſs er nicht einmal wartete, bis das von mir zu dieser Absicht einzusendende Exemplar in Gotha angekommen war, sondern inzwischen sein eigenes dazu hergab?

5) Wie konnte endlich ein Mann mit Ueberzeugung und im Ernste mir *Erbitterung und Empörung gegen französische Gelehrte* zur Last legen, der einen von Gotha unterm 7ten Sept. 1798. erlassenen Brief seines Freunds La Lande an mich, wie ich aus der

teutschen Adresse schliessen muſs, selbst bestellt, und, wenn nicht auch selbst gelesen, doch wenigstens dessen Inhalt im Allgemeinen gewuſst hat, worin der verehrungswürdige Verfasser schreibt: „Je „reçois avec une extrême Satisfaction votre lettre du „29. Aoust avec la dissertation curieuse, dont Vous „voulés bien me faire le sacrifice; les observations „qu'elle renfêrme et les citations nombreuses, que „votre Erudition y ajoute feront en augmentation „precieuse a mon traité du-flux et reflux de la mer, „que je me propose de faire reimprimer, quand j'au„rai reçu par les Savans, aussi obligeants que Vous, „de quoi rendre cette edition intéressante."

Aus allen diesen Gründen folgt, so viel ich einsehen kann, unwidersprechlich, daſs die Kritik des Hrn. M. v. Z. unmöglich aus seiner eigenen Ueberzeugung geflossen seyn, und mithin die wahre Veranlassung dazu auch nicht in meiner Uebersezung selbst liegen könne. Nach dem bekannten unwiderstehlichen Drange, den der Geist jedes denkenden Menschen fühlt, von allem das: *Warum*? zu ergründen, muſste ich mich natürlicherweise auch bemühen, der veranlassenden Ursache von jener Kritik nachzuspüren. Da nun das lezte Schreiben des Hrn. M. v. Z. an mich vom 17ten August 1798, das lezte von La Lande aber vom 7ten September desselben Jahrs war, hingegen der Angriff des Hrn. Majors auf mich in der Einleitung zum Januarstücke der A. G. E. von 1799. erfolgte, so war der Schluſs wohl

ziemlich sicher, daſs die Veranlassung zu diesem Angriffe in einem Umstande liegen müsse, der zwischen den September und 1798 Januar 1799 falle. Allein, da wir während dieser Zeit keine Briefe weiter gewechselt hatten, und ich mir bewuſst war, daſs auch sonst, weder meinem Munde noch meiner Feder irgend ein Wort entfallen wäre, das den Hrn. M. v. Z., vorausgesezt, daſs er der Mann sey, wofür ich Ihn bis dahin gehalten hatte, nur auf die entfernteste Weise hätte beleidigen können; so würde ich vielleicht jezt noch vergeblich nach jenem Grunde suchen, wenn ich nicht durch die gütige Mittheilung des Hrn. Geh. Raths Baldinger einen Schlüssel zur Enträthselung aller jener Unbegreiflichkeiten in die Hände bekommen hätte. Dieser Schlüssel ist ein Brief des Hrn. M. v. Z. an Hrn. G. R. B. dd. Seeberg, den 22. Merz 1799, welcher eine Antwort auf einen Vorhalt enthält, den der würdige Mann -- der an jeder Kränkung, die einem seiner Collegen, der ihm keine Schande macht, widerfährt, immer patriotischen Antheil zu nehmen pflegt -- dem Hrn. M. v. Z. wegen seiner, allen meinen Bekannten ebenso, wie mir, unerklärbaren Kritik von meiner Uebersezung gemacht hatte, und worin die auf diesen Punkt sich beziehende Stelle buchstäblich so lautet:

„Hrn. Prof. Hauf Feind bin ich nicht, ich habe
„nichts gegen ihm, habe nicht ihn angegriffen, habe
„ihn gar nicht genannt, aber ich habe nur einen La
„Plaçe vertheidigt, nur gesagt, daſs er nicht kau-

„derwelsch schreibt, und seine Muttersprache bes-
„ser, als sein Uebersezer versteht. Hr. Hauf kann
„wohl in einem Punkt eine Uebereilung gemacht ha-
„ben, und deswegen doch ein schäzbarer Gelehrter
„seyn, aber ein besserer Ton könnte ihm nicht scha-
„den, ich habe schon mehr aus Cassel darüber kla-
„gen hören; Da Sie sein Freund sind, so erzählen
„Sie ihm von dem Pulver, das Sie so viel, er noch
„gar nicht gerochen hat, er scheint die Welt frey-
„lich nur par le Trou d'une Bouteille gesehen zu ha-
„ben, davon hat er, unter uns gesagt, abermals ei-
„nen kleinen Beweis gegeben. Er hat in Cassel ei-
„nen Quadranten verlangt, den der Landgraf vor 10
„Jahren der Seeberger Sternwarte geborgt hat. Ich
„bin im Jahr 1789 selbst in Cassel gewesen, und
„habe bey dem Landgrafen um dieses Instrument an-
„gehalten, und auch erhalten. Nun will Hr. Prof.
„Hauf mir den Quadranten abjagen, und glaubt, daſs
„er auf dem alten Marburger Schloſs besser als bey
„mir auf dem Seeberge aufgehoben seyn wird. Allein
„ich muſs Ihnen, Hochgeehrtester Herr Geheime
„Rath, sub Rosa nur sagen, daſs, wie das triviale
„Sprüchwort sagt, Hr. Hauf mir einen Hasen in die
„Küche gejagt hat, er bekommt den Quadranten nim-
„mermehr, und wenn er ihn bey Kayser und Reich
„begehrt. Ich kann etwas besser manoeuvriren als
„Hr. Prof. Hauf, dafür bin ich Soldat, und verstehe
„etwas von Taktik und Strategie. Ein Bischen Cre-
„dit habe ich in Cassel auch. Kurz und gut, die

„Sache iſt auf gut militairiſch behandelt worden, und „der Quadrant quaeſtionis gehört nicht mehr einem „Landgrafen zu Heſsen, ſondern einem Herzog zu „Sachſen, und wenn Hr. Hauf ihn haben will, muſs „er ihn bey dem Herzog von Gotha ſollicitiren, deſ„ſen Eigenthum er, Dank ſey es Hrn. Hauf's Welt„kenntniſs, ſeit ein paar Tagen geworden iſt. Je „n'en veux pas à Mr. Hauf. Ich werde Ihn gewis nie „wieder nennen."

Um meinen Leſern dieſen merkwürdigen Brief verſtändlich zu machen, muſs ich ihnen jene fatale Quadranten-Geſchichte ab ovo erzählen.

Im December des abgewichenen Jahrs 1798, und zwar zu Anfange dieſes Monats, wurden von der, zu ſolchen Geſchäften verordneten, Commiſsion zwei auf dem hieſigen Schloſsberge auſser der Stadt gelegene alte Pulverthurme in dem hieſigen Wochenblatte zu Kauf oder Leihe ausgeboten. Sobald ich davon Nachricht erhalten hatte, veranlaſsete mich die zu einer Sternwarte vortreflich geſchickte Lage des einen dieſer Thürme an den damaligen Prorector, Hrn. Conſiſtorialrath Muenſcher, ein Schreiben zu erlaſſen, worin ich ihn erſuchte dem akademiſchen Senate den Antrag zu thun, ob dieſer nicht für gut fände, dieſe für die Stiftung einer, unſerer Univerſität noch fehlenden, aſtronomiſchen Anſtalt ſo günſtige Gelegenheit dazu zu benuzen, um des Herrn Landgrafen Hochfürſtlichen Durchlaucht die unterthänigſte Bitte vorzulegen, daſs Höchſtdieſelben uns

nicht nur die feilgebotenen Thürme zu dem erwähnten Zwecke einräumen, sondern auch einige von den auf der Casselischen Sternwarte entbehrlichen Instrumenten gnädigst überlassen möchten.

Mein Vorschlag wurde von dem hiesigen akademischen Senate *einstimmig* genehmiget, und ihm gemäſs die unterthänigste Vorstellung an des Herrn Landgrafen Hochfürstliche Durchlaucht von dem damaligen Prorector sogleich ausgefertiget.

Die Folge davon war, daſs von Seiten des Casselischen Hofs der *Dollondische* Quadrante von Gotha zurückverlangt wurde, vermuthlich, weil man der Casselischen Sternwarte nicht gerne die beyden vortreflichen Quadranten, den *Dollendischen* und *Ramsden'schen* zugleich entziehen wollte. Auf diese Requisition, folgten Unterhandlungen von Seiten des Gothaischen Hofs, die sich damit endigten, daſs des Herrn Landgrafen Hochfürstliche Durchlaucht den *Dollondischen* Quadranten an Seine Durchlaucht den Herzog von Gotha gänzlich und eigenthümlich überliessen. Die hiesige Universität erhielt auf ihren Antrag keine Resolution, und eben dieser Umstand gab dem Hrn. Geh. Rath Baldinger Veranlassung, das obige Schreiben des Herrn M. v. Z., in dem, zu literäischen Mittheilungen bestimmten, Kästchen, nicht nur mir, sondern auch mehreren andern meiner Herrn Collegen zuzuschicken, um uns das Ausbleiben der landesherrlichen Resolution zu erklären.

Ueber dieses merkwürdige Schreiben nun will ich von den vielen Anmerkungen, die sich mir dabey aufdringen, nur diejenigen hersezen, die mir mit dem Zwecke meiner vollständigen Rechtfertigung in der genauesten Verbindung zu stehen scheinen.

I. Wie konnte der Hr. M. v. Z. im Ernste sich damit entschuldigen, daſs Er bey seinem Angriffe *mich nicht genannt* habe, da Er den Uebersezer von La Plaçe angegriffen hat; ich selbst aber auf dem Titel meiner Uebersezung mich als solchen genannt habe, und auch, schon im ersten Stücke seiner Zeitschrift, als solcher genannt worden bin?

II. Wenn der Hr. M. v. Z. der Meinung ist, ein *besserer Ton* könnte mir nicht schaden, so könnte ich zwar deſswegen geradezu auf meine oben geführte Vertheidigung verweisen, in der zuversichtlichen Hoffnung, daſs meine Leser nichts daran vermissen werden, was sie abhalten könnte, mich von diesem Vorwurfe gänzlich freyzusprechen. Da ich aber diesen Punkt am wenigsten leicht nehmen kann, weil ich einen akademischen Lehrer, dessen Ton nichts taugt, nach meinen Grundsäzen, für einen Verführer der Jugend halten muſs, und der Hr. M. v. Z. sich diesfalls auf Nachrichten aus Cassel beruft; so wäre ich sehr begierig, zu hören, wer diejenigen seyen, welche in Cassel über meinen Ton Klage geführt, und auf welchen Gründen sie solche geführt haben?

Inzwischen seze ich seiner unbestimmten und unverbürgten Aussage die bestimmte Berufung auf das

ganze hiesige Publicum entgegen, welchem es bekannt ist, daſs, während meines hiesigen Lehramtes, ausser mehreren Prinzen, Grafen und vielen Edelleuten, auch Regierungsräthe, Assessoren, Hofräthe, Professoren, graduirte Personen aus allen Facultäten, Prediger und Hofmeister an meinen Vorlesungen Theil genommen haben, ohne daſs jemals auch nur die leiseste Aeusserung von Unzufriedenheit über meinen Ton einem von allen entfallen wäre. Eben so getrost kann ich mich auf das Zeugniſs von mehr als einem Duzende würdiger junger Männer berufen, die aus meiner Schule hervorgegangen sind, und bereits verschiedenen teutschen und auswärtigen Staaten in wichtigen Posten dienen, von welchen allen ich die beruhigende und für mich höchstwohlthätige Gewiſsheit habe, daſs sie mein Andenken segnen werden, so lange ein Athem in ihnen seyn wird.

III. Wenn der Hr. M. v. Z. in dem von hier aus geschehenen Ansuchen um einen -- *nicht den Dollondischen* -- Quadranten einen Beweis von Mangel an Welt- und Menschenkenntniſs zu finden glaubt, so trift dieser Vorwurf, nach der oben beygebrachten actenmässigen Darstellung des wahren Verlaufs der Sache, nicht mich, denn ich, -- meines Orts erwartete, nach dem geringen Maase *meiner* Menschenkenntniſs, von einem Antrage dieser Art mehr Wirkung, wenn ihn ein ganzes Collegium, als wenn ihn ein einzelner Staatsdiener machte -- sondern den *ganzen hiesigen akademischen Senat*, welcher *einstimmig* die

die Ausführung meines Vorſchlags ſeinen Pflichten gemäſs und ganz unbedenklich gefunden hat; und er trift ganz vorzüglich jenen würdigen Mann, dem der Hr. M. v. Z. ſelbst ſo viele Weltkenntniſs zutraut und einräumt, weil dieſer mit beſonderem Nachdrucke ſich für meinen Vorſchlag erklärt hat. Nun beſteht der hieſige akademiſche Senat aus einem Prorector, Vicekanzler und fünf und zwanzig ordentlichen Profeſſoren; dieſe alle hätten ſich alſo eines ſo groſsen Mangels an Welt- und Menſchenkenntniſs ſchuldig gemacht, daſs man glauben ſollte, ſie alle hätten die Welt nur *par le Trou d'une Bouteille* geſehen! Und doch ſind unter ihnen Männer, welche die *groſse Welt*, in geographiſchem und politiſchem Verſtande, gewiſs ohne Vergleichung beſſer kennen zu lernen Gelegenheit gehabt haben, als der Hr. Major, deſſen Reiſen, meines Wiſſens, nie über unſern Welttheil hinausgegangen ſind.

IV. Wenn der Hr. M. v. Z. in der Meinung ſtand, ich habe ihm den *Dollondiſchen* Quadranten abjagen wollen, ſo war dies ein Irrthum. Daſs ich in meinem Antrage unter den in Caſſel entbehrlichen Inſtrumenten auch den *Dollondiſchen* Quadranten genannt habe, iſt wahr, und dies war unvermeidlich, weil er ſchon ſeit zehen Jahren nach Gotha verliehen war. Daſs ich aber nicht nur zugleich den, noch in Caſſel befindlichen, *Ramsden'ſchen* Quadranten unter den daſelbst entbehrlichen Stücken genannt, ſondern auch ausdrücklich dabey bemerkt habe, daſs dieſer 1) wegen ſeines kleineren — und unſerem beſchränkten Raume angemeſſe-

nern -- Radius, 2) wegen des mit ihm verbundenen Azimuthalkreiſes, uns viel nüzlicher seyn würde, als der *Dollondiſche*, davon kann sich Hr. M. v. Z. durch eine glaubwürdige Abschrift meines Antrags überzeugen, wenn Er ſich deſswegen an die Behörde wenden will.

V. Aber gesezt, ich hätte wirklich diese Absicht gehabt, wäre denn das eine Handlung, die der Hr. Major mir, als ordentlichen Lehrer der Mathematik auf der ersten hessischen Landes-Universität zum Verbrechen machen könnte, wenn ich bemüht gewesen wäre, dieser Universität ein Instrument zu verschaffen, das ihr gnädigster Erhalter schon vor zehn Jahren seinem Fürsten zu leihen die Gefälligkeit gehabt hatte, und dessen groſsen Werth Er selbst seitdem, bey mehr als einer Gelegenheit, öffentlich gerühmt hat? Oder

VI. Hält etwa der Hr. M. v. Z. die Ansprüche des Eigenthümers auf ein Ihm geborgtes Stück deſswegen für widerrechtlich und beleidigend, weil Er vielleicht überzeugt ist, daſs solches bey Ihm besser, als bey dem Eigenthümer aufgehoben sey?

VII. Daſs der Hr. M. v. Z. besser manövriren kann, als ich, und daſs Er mehr von Taktik und Strategie versteht, ist seine Schuldigkeit; denn Er ist, wie Er selbst sagt, Soldat, und ich bin Akademiker. Daſs Er aber hiermit seiner Taktik und Strategie sich brüstet, ist eine Handlung, für deren Bezeichnung ich kein passendes Wort finden kann.

Denn welchem Kinde hofft der Hr. M. v. Z. es glaublich zu machen, daſs ein Fürst, der, vor den Augen

von ganz Europa, den Heeren der, sich so nennenden, *groſsen Nation* im Innern ihres Landes mit seinen braven Kriegern die Spize geboten, den Kampfplaz auf eine so ausgezeichnet rühmliche Art verlassen, und seinen Staaten das Glück des Friedens aufs Neue gesichert hat, sein Eigenthum in seiner Residenz gegen die Strategie eines benachbarten Majors nicht zu schüzen gewuſst habe? Wäre nicht die Gefälligkeit unsers Durchlauchtigsten Fürsten vor zehn Jahren schon bereit gewesen, der Lieblings-Neigung Seiner Durchlaucht des Herzogs zu Gotha ein solches Opfer zu bringen, so möchte wohl die ganze hochgepriesene Taktik und Strategie hier wenig ausgerichtet haben!

Und wenn auch hier auf Strategie etwas angekommen wäre, wie übel wäre mir, dem Unterthan, meinem Fürsten, für dessen Interesse ich arbeitete, gegenüber, solche angestanden?

Aber, gesezt auch, ich hätte mir hier den Gebrauch irgend einer Strategie erlauben können, so würde ich doch die des Hrn. M. v. Z. nie zu der meinigen gemacht haben. Mein Vater -- Dank sey noch seiner Asche dafür! -- hat mich gelehret, *honestate certare cum honestis*, und damit verträgt sich eine Strategie, wie die hier gebrauchte, nicht,

VIII. Um den Kredit, den der Hr. M. v. Z. in Cassel hat, oder zu haben glaubt, beneide ich ihn nicht. Wie viel Er aber, *als Mensch*, dessen verdiene, darüber werden meine Leser leicht urtheilen können, wenn ich ihnen sage, daſs derselbe Mann,

der sich für verpflichtet hielt, meinem gnädigsten Fürsten und seinem Staats-Minister die untenstehende öffentliche Danksagung *) für die Ueberlassung des *Dollondischen* Quadranten zu machen, doch kein Bedenken getragen habe, einen treuen und nüzlichen Diener eben dieses Fürsten und eben dieses Staats so bitter anzufeinden, und ihm einen bösen Namen in der literärischen Welt zu machen, weil er den ungegründeten Verdacht hatte, dieser habe ihm jenes schäzbare Werkzeug, zu einer Zeit, wo es seinem Fürsten nur geborgt war, aus den Händen spielen wollen.

IX. Wie sehr der Hr. M. v. Z. das, wie Er glaubte, von meiner Seite geschehene Ansuchen um den, Ihm so schäzbaren und gewissermassen unentbehrlichen Quadranten mir zum Verbrechen gemacht habe, -- und wie konnte das ein Mann, von dessen grofsen Verdiensten das rastlose Bestreben, astronomische Thätigkeit jeder Art zu wecken, zu fördern und zu begünstigen, eins der ausgezeichnetsten ist, wenn Ihn nicht eigenes Interesse hier einzig be-

(*) „Den *vierfüssigen Dollondischen Quadranten* verdankt die See-„berger Sternwarte der Gnade des *Landgrafen von Cassel*, vor-„züglich aber der gütigen und zuvorkommenden Verwen-„dung des nicht nur die Wissenschaften beschüzenden, son-„dern auch mit ihnen innigst vertrauten geheimen Raths „und Ober-Marschalls Freyh. v. *Veltheim*, welche Gunst „wir nicht dankbar genug erkennen können, und hier auch „öffentlich bezeugen müssen, da wir ohne dieses Werkzeug, „das nicht würden haben leisten können, was wir bisher „seit 10 Jahren ununterbrochen damit wirklich geleistet „haben.“ A. G. E. 3ter Bd. S. 421. Z. 3 v. U. u. f.

herrscht und fortgerissen hätte? -- beweiſst zwar der hohnneckende Ton des ganzen Briefs, aber doch am auffallendsten das am Ende desselben abgelegte Gelübde, mich *nie wieder zu nennen*, das als Gelübde des Herausgebers einer geographisch-astronomischen Zeitschrift in Beziehung auf einen öffentlichen akademischen Lehrer der Mathematik gewiſs einzig ist. Ich gedachte zwar anfänglich auf diese merkwürdige Lossagung nichts zu erwiedern, als die einzige Frage:

„*Tantaene animis coelestibus irae?*“

Aber ich konnte mir doch nicht versagen, hier eine Vergleichung zwischen dem Betragen des Hrn. M. v. Z. gegen mich, und dem seines Freundes La Lande gegen Ihn, in einem ähnlichen Falle, anzustellen.

Wie ganz anders handelte doch dieser ehrwürdige Greis, der, als der Hr. M. v. Z. einen in Paris feil gewordenen *Birdischen Mauerquadranten* für die Seeberger Sternwarte zu bekommen suchte, während er selbst bemüht war, solchen für eine der dortigen astronomischen Anstalten zu erhalten, in seinen Briefen an den Hrn. Major darüber scherzte, daſs er ihm dieses Instrument hätte *wegkapern* *) wollen. Wenn nun La Lande wegen dieses *Gelüstens* ein ähnliches Straf-Exempel an dem Hrn. M. v. Z. hätte aufstellen, und um Ihn in Frankreich um seinen literärischen Kredit zu bringen, bey der ersten besten Gelegenheit der mit dem 1ten Stücke des 3ten Bandes der A. G. E.

(*) A. G. E. 2ter Bd. S. 172. Z. 3. v. U.

ausgegebenen *Rennelliſchen* Karte von Nord-Africa etwa auf folgende Art gedenken wollen: „Seine Unfä„higkeit, dieſe Karte den Teutſchen in ihrer Sprache „zu überliefern, hat der Herausgeber ſchon dadurch „hinreichend bewieſen, daſs er das engliſche *Counthry* „*of Dates* durch: Gebiet von *Dates* ausgedrückt, und „auf ſolche Art zwiſchen das *Datteln-Land* (*Belad al* „*Jerid*) und die *groſse Wüste* eine Provinz gebracht „hat, die nirgends vorhanden iſt, als im Kopfe eines „Ueberſezers, der nicht wuſste, daſs das engliſche „*Date* und das arabiſche *Jerid* ſynonym ſind, und eins „wie das andere: *Dattel* heiſst." wie möchte das wohl dem Hrn. M. v. Z. gefallen haben? Aber dazu war der *franzöſiſche* Aſtronome zu *ehrlich*.

X. Wenn endlich der Mann, der an mir ein ſo ganz einziges Beyſpiel von *Ariſtarchen-Terrorismus* anfzuſtellen ſich erlauben konnte, denſelben Aufſaz, der eben dieſes Beyſpiel enthält, mit dem Verſprechen beſchlieſst, auch in dieſem Jahrgange ſeiner Zeitſchrift bey Seneca's gutem Rathe: „*Non ſit tibi* „*frons ficta, nec in alienam voluntatem ſermo compoſi*„*tus, nec cor involutum* — — — — *nec ambitio; quae* „*te ad dignitatem, niſi per indigna, non ducet!*" zu bleiben; ſo werden meine Leſer es wohl begreiflich finden, daſs mir dabey eine andere Stelle eben dieſes Philoſophen *) einfiel: „*Si ſciret, quid eſſet vir bonus,* „*nondum ſe eſſe crederet, fortaſſe etiam fieri poſſe de*„*ſperaret.*"

(*) Ep. XLII.

Uebrigens versichere ich meinen Lesern auf das feyerlichste, daſs ich kein unseligeres Geschäfte kenne, als das ist, an groſsen und sonst verdienstvollen Männern Flecken aufzusuchen, und sie öffentlich zur Schau auszustellen, und daſs daher auch alle oben beleuchteten Eigenschaften der Kritik des Hrn. M. v. Z. mich doch nie dazu vermocht haben würden, das Publicum mit einer Klage darüber zu behelligen, wenn ich nicht eines Theils meiner eigenen Ehre, -- denn *meine Person*, nicht blos *meine Arbeit*, war angegriffen -- andern Theils aber der Verlagshandlung, die es von ihrer Seite gewiſs an nichts fehlen lieſs, um die Freunde der Wissenschaft durch meine Uebersezung von La Plaçe's Werke zu befriedigen, es schuldig gewesen wäre, *mich* dagegen zu rechtfertigen.

Nach dieser langen Abschweifung komme ich nun wieder zu meinem Carnot zurück.

In den, meiner Uebersezung angehängten, Zusäzen, habe ich hauptsächlich das zu ergänzen gesucht, was mir der Schrift noch abzugehen schien, um für den Anfänger recht nuzbar zu seyn, nämlich eine *historisch-kritische Uebersicht von dem Ursprunge und Fortgange der Infinitesimalrechnung*, so weit als solche zu Erlangung einer deutlichen Einsicht in die Gründe der Rechnung selbst unentbehrlich ist; und ich schmeichle mir mit der Hoffnung, durch diese Bemühung es dahin gebracht zu haben, daſs die Schrift nunmehr von jedem Anfänger bey seinem ersten Fleisse in dieser Wissenschaft mit dem gröſsten Vortheile zum Grunde gelegt werden könne.

Bey der Darstellung der älteren Methoden habe ich mich hauptsächlich an Montucla gehalten, übrigens aber meine Quellen überall genannt. Die von mir herrührenden Anmerkungen sind mit dem Buchstaben H. bezeichnet.

In der Geschichte des Streits über die Erfindung der Infinitesimalrechnung hat mich eine neue und sorgfältige Untersuchung der dahin gehörigen Actenstücke, soweit ich ihrer habhaft werden konnte, zu einem Resultate geführt, das nach meiner Einsicht, der Wahrheit und Gerechtigkeit angemessener ist, als irgend eine andere Entscheidung dieses Streits.

Wenn ich übrigens theils in dem eben erwähnten Abschnitte, theils in der mehr angedeuteten, als ausgeführten Apologie des Unendlichen von der Meinung einiger groſsen und von mir innigst verehrten Männer, deren vortreflichem, mündlichem und schriftlichem, Unterrichte ich selbst den schäzbarsten Theil meiner Kenntnisse verdanke, abging, so geschah dies nicht, um ihnen zu widersprechen, sondern, weil ich, nach meiner jezigen Ueberzeugung, davon abgehen muſste, und zugleich versichert war, daſs diese verehrungswürdigen Männer selbst der Wahrheit viel zu aufrichtig gehuldiget haben, als daſs irgend eine Art von Ehrerbietung, die von Seiten dessen, der sie ihnen bewiese, mit der Achtung für die Wahrheit im Widerspruche stünde, ihnen angenehm seyn könnte.

Marburg,
den 12. October 1799.

Johann Karl Friedrich Hauff
Professor der Mathem. u. Physik.

Betrachtungen
über die
Theorie der Infinitesimalrechnung.

§. 1. Es giebt keine Entdeckung, welche in den mathematischen Wissenschaften eine so glückliche und so schnelle Revolution bewirkt hätte, als die der Analysis des Unendlichen; keine hat auch einfachere und wirksamere Mittel, in die Kenntniſs der Naturgeschichte einzudringen, an die Hand gegeben. Indem sie die Körper so zu sagen bis in ihre Elemente zerlegt, scheint sie die innere Einrichtung und Organisation derselben angezeigt zu haben; aber da alles, was in seiner Art das Aeuſserste ist, den Sinnen und der Einbildungskraft entgeht, so hat man sich von diesen Elementen, einer Art besonderer Dinge, die bald die Rolle wirklicher Grösen spielen, bald als absolute Nullen betrachtet werden müssen, und vermöge ihrer zweideutigen Eigenschaften zwischen der Gröse und der Nulle, zwischen der Realität und Negation in der Mitte zu stehen scheinen (*), immer nur eine unvollkommene Vorstellung machen können.

(*) Ich spreche hier den schwankenden Vorstellungen gemäs, die man sich gewöhnlich von den unendlich kleinen Grösen macht, wenn man sich die Mühe nicht gegeben hat, ihre Natur zu untersuchen. In der That aber ist nichts einfacher,

Glücklicherweise hat diese Schwierigkeit dem Fortgange dieser Entdeckung keinen Nachtheil gebracht. Es giebt gewisse Grundbegriffe, die immer einige Dunkelheit in dem Verstande zurüklassen, deren erste Folgen aber, wenn sie einmal gezogen sind, ein weites und leicht zu durchlaufendes Feld eröffnen. Von dieser Art scheint der Begriff des Unendlichen zu seyn, wovon mehrere Geometer den glücklichsten Gebrauch gemacht haben, die ihn vielleicht nicht gegründet hatten. Indessen konnten sich die Philosophen mit einem so unbestimmten Begriffe nicht befriedigen; sie wollten zu den ersten Gründen zurükgehen, konnten aber auch in ihren Meinungen, oder vielmehr in der Art, die Gegenstände zu betrachten, nicht einig werden. Diese verschiedene Gesichtspunkte zusammenzurücken, ihre Beziehungen zu zeigen, und einige neue anzugeben, ist die Absicht der gegenwärtigen Schrift; wobei ich mich für meine Arbeit wohl belohnt achten werde, wenn es mir gelingen wird, einiges Licht über einen so wichtigen Gegenstand zu verbreiten.

§. 2. Die Schwierigkeit, die man oft findet, die verschiedenen Bedingungen einer Aufgabe genau durch Gleichungen auszudrücken, und diese Gleichungen aufzulösen, konnte auf die ersten Begriffe von der Infinitesimalrechnung leiten. Wenn es sehr schwer ist,

---

als der Begriff von diesen Grösen. Von einer Gröse sagen, sie sey unendlich klein, heiſst genau so viel, als: sie sey der Unterschied zweier Grösen, die einerlei dritte Gröse zur Gränze haben, und nichts weiter. Der Begriff einer unendlich kleinen Gröse ist demnach eben so leicht zu fassen, als der einer Gränze; aber er hat, wie jedermann zugesteht, vor diesem den Vorzug, daſs er zu einer viel einfacheren Theorie führt.

eine völlig genaue Auflösung einer Aufgabe zu finden, so ist es natürlich, sich wenigstens zu bemühen, ihr so nahe als möglich zu kommen, dadurch daſs man Grösen ausser Acht läſst, die die Combinationen verwickelt machen, wenn man vorraussieht, daſs die Vernachlässigung dieser Grösen, ihres geringen Werthes wegen, in dem Resultate der Rechnung nur einen unbedeutenden Irrthum verursachen könne. So wird man z. B., da man Mühe hatte, die Eigenschaften der krummen Linien zu entdecken, darauf gefallen seyn, sie als Vielecke von sehr vielen Seiten zu betrachten. In der That, wenn man sich z. B. ein ordentliches Vieleck in einen Kreis beschrieben vorstellt, so ist klar, daſs diese beide Figuren, obschon sie immer unterschieden bleiben, und einander nie völlig gleich werden können, doch der Gleichheit immer in eben dem Maase näher kommen, als die Zahl der Seiten des Vielecks zunimmt, daſs ferner ihre Perimeter, ihre Flächen, die durch ihre Umdrehung um eine gegebene Axe beschriebene Körper, die in und um diese Figuren gezogenen ähnlich liegenden Linien, die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel u. s. w., wenn nicht stückweise einander gleich, doch wenigstens der Gleichheit um so viel näher sind, je gröser die Zahl der Seiten wird. Daraus aber folgt, daſs, wenn man diese Seitenzahl wirklich sehr gros annimmt, man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, dem um das Vielek beschriebenen Kreise die Eigenschaften beilegen kann, von welchen man gefunden hat, daſs sie dem darein beschriebenen Vieleke zukommen.

Ueberdies nimmt offenbar jede Seite dieses Vielecks in eben dem Maase an Gröse ab, als die Seitenzahl zunimmt. Wenn man daher annimmt, daſs das Vieleck wirklich aus sehr vielen Seiten bestehe, so kann man auch sagen, daſs jede derselben in der That ſehr klein sey.

Wenn also, nach diesen Voraussezungen beim Verlaufe einer Rechnung, sich von ohngefähr ein besonderer Umstand zeigte, wo man die Operationen dadurch sehr vereinfachen könnte, daſs man z. B. eine dieser kleinen Seiten, in Vergleichung mit einer gegebenen Linie, ausser Acht lieſse, d. h. daſs man in der Rechnung diese gegebene Linie an Statt einer Gröse gebrauchte, welche der Summe dieser Linie und der erwähnten kleinen Seite gleich seyn sollte, so ist klar, daſs man solches ohne Nachtheil thun könnte, denn der Irrthum, der daraus folgen würde, könnte nur äusserst klein seyn, und verdiente nicht, daſs man sich die Mühe gäbe, ſeinen Werth kennen zu lernen.

§. 3. Es sey z. B. die Aufgabe:

An den gegebenen Punkt M der Kreisperipherie MBD eine Tangente zu ziehen.

Es sey C des Kreises Mittelpunkt, DCB die Axe; man seze die Abscisse DP = x, die zugehörige Ordinate MP = y, und es sey TP die gesuchte Subtangente.

Um diese zu finden, betrachten wir den Kreis als ein Vieleck von sehr vielen Seiten; es sei MN eine dieser Seiten; verlängern wir sie bis an die Axe, so wird diese offenbar die gesuchte Tangente seyn, da diese Linie nicht durch einen Theil der Fläche des Vielecks geht. Fällen wir ferner auf die der MP parallele NZ das Loth MO, und nennen wir des Kreises Halbmesser a, so erhalten wir offenbar

$$MO : NO = TP : MP, \text{ oder } \frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y}.$$

Da aber auf der andern Seite die Gleichung der krummen Linie für den Punkt M ist $y^2 = 2ax - x^2$, so wird sie für den Punkt N seyn

$$(y + NO)^2 = 2a(x + MO) - (x + MO)^2,$$

Wenn man nun von dieser Gleichung die erste, für den Punkt M gefundene, abzieht, und sie reducirt, so erhält man $\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO}$.

Sezt man diesen Werth von $\frac{MO}{NO}$ dem oben gefundenen gleich, und multiplicirt man mit y, ſo wird daraus $TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$.

Wären also MO und NO bekannt, so hätte man den gesuchten Werth von TP. Nun sind aber diese Grösen MO, NO sehr klein, weil jede von ihnen kleiner ist, als die Seite MN, welche, nach der Voraussezung, selbst sehr klein ist; folglich kann man (§. 2.) ohne einen merklichen Fehler diese Grösen in Vergleichung mit den Grösen 2 y und 2 a — 2 x, denen sie angehängt sind, ausser Acht laſsen; und mithin verwandelt sich die obige Gleichung in folgende: $TP = \frac{y^2}{a - x}$, was zu finden war.

§ 4. Wenn dieses Resultat nicht vollkommen genau ist, so ist es wenigstens einleuchtend, daſs es in der Ausübung für ein solches gelten könne, weil die Grösen MO, NO äusserst klein sind. Aber jemand, der noch gar keinen Begriff von der Theorie des Unendlichen hätte, würde vielleicht sehr erstaunt seyn, wenn man ihm sagte, daſs die Gleichung $TP = \frac{y^2}{a - x}$ nicht nur der Wahrheit sehr nahe komme, sondern wirklich vollkommen genau sey. Dies ist indessen eine Sache, wovon man sich leicht versichern kann, wenn man TP nach dem Saze sucht, daſs die Tangente auf dem Halbmesser in seinem Endpunkte lothrecht steht. Denn es ist klar, daſs die ähnlichen Dreieke CPM, MPT geben CP : MP = MP : TP, woraus man erhält $TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a - x}$, wie oben.

§. 5. Zum zweiten Beispiele wollen wir die Aufgabe wählen: Die Fläche eines gegebenen Kreises zu finden.

Wir betrachten diese krumme Linie noch als ein ordentliches Vieleck von sehr vielen Seiten; die Fläche eines jeden ordentlichen Vielecks ist gleich dem Produkte seines Perimeters in das halbe Loth aus dem Mittelpunkte auf eine der Seiten; Wird also der Kreis als ein Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet, so muſs seine Fläche dem Produkte aus seiner Peripherie in den halben Radius gleich seyn. Dieser Saz ist eben so genau, als das oben gefundene Resultat.

§. 6. So schwankend und ungenau auch die Ausdrücke: *sehr groſs*, *sehr klein*, und andere gleichbedeutende scheinen mögen, so sieht man doch aus den zwei vorhergehenden Beispielen, daſs man sich ihrer bei den mathematischen Combinationen mit Nuzen bedient, und daſs ihr Gebrauch bei der Auflösung verschiedener Aufgaben, die vorkommen können, eine groſse Erleichterung schaffen kann. Denn nimmt man einmal die Begriffe davon an, so kann man alle Curven eben so gut, wie den Kreis, als Vielecke von sehr vielen Seiten betrachten, alle Flächen in eine Menge Streifen oder Zonen theilen, alle Körper in kleine Körperchen, und mit *einem* Worte, alle Grösen in gleichartige kleine Theilchen zerlegen. Daraus entstehen viele neue Verhältnisse und Combinationen, und man kann, nach den oben angeführten Beispielen, leicht von den Hülfsmitteln urtheilen, welche die Einführung dieser elementarischen Grösen für die Rechnung darbieten muſs.

§. 7. Aber der Vortheil, den sie bringen, ist noch weit beträchtlicher, als man Anfangs hoffen konnte; denn es folgt aus den beigebrachten Beispielen, daſs das, was man zuerst als eine blose Näherungs-

methode betrachtet [illegible] wer[illegible] in gewissen Fällen, zu völlig ge[illegible]esu[illegible]hrt. Es wäre daher von Wichtigkeit, diejenige[illegible] wo dieses zutrift, unterscheiden zu können, die übrigen, so weit, als es sich thun läſst, auf sie zurük zu führen, und auf solche Art diese Nahrungsmethode in eine völlig scharfe und genaue Rechnung zu verwandeln. Und eben dieses ist der Gegenstand der Analysis des Unendlichen.

§. 8. Wir wollen demnach zuerst sehen, wie es in der oben ([illegible]) gefundenen Gleichung

$$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$$

ge[illegible] konnte, daſs durch Vernachläſsigung der Grösen MO und NO die Richtigkeit des Resultats nicht verändert wurde, oder vielmehr, wie dieses Resultat erst durch Ausschliesung dieser Grösen genau wurde, und warum es vorher das nicht war.

Von dem, was bei der Auflösung der oben behandelten Aufgabe erfolgte, kann man auf eine sehr einfache Art Rechenschaft geben, wenn man bemerkt, daſs, da die Voraussezung, von welcher man ausgieng, falsch ist, weil es schlechterdings unmöglich ist, daſs ein Kreis jemals als ein wahres Viele[illegible]etrachtet werden könnte, wie groſs man auch i[illegible]er die Anzahl seiner Seiten rechnen mag, von dieser Voraussezung irgend ein Fehler in der Gleichung

$$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$$

herrühren muſste, und daſs man, da das Resultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$, nichts desto weniger völlig genau ist, wie man durch Vergleichung der beiden Dreiecke CPM, MPT beweiſst, die Grösen MO und NO in der ersten Gleichung ausser Acht lassen konnte, ja daſs man es thun muſste, um die Rechnung zu berich-

tigen, und d[illegible] um [illegible] ben, den die falsche Voraussezung [illegible] on [illegible] gegangen war, veranlasset hatte. Grösen von dieser Beschaffenheit ausser Acht zu lassen, ist demnach in ähnlichen Fällen nicht blos erlaubt, sondern es muſs sogar geschehen, und dies ist der einzige Weg, die Bedingungen der Aufgabe genau auszudrücken.

§. 9. Das genaue Resultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ ist also blos durch eine *Aufhebung der Fehler* erhalten worden, welche dadurch noch einleuchtend [illegible] macht werden kann, wenn man das oben beigebra[illegible] Beispiel noch auf eine andere Art behandelt, indem man d[illegible] als eine wahre Curve, nicht als ein Vieleck b[illegible].

Zu dem Ende ziehe man durch einen Punkt R in beliebiger Entfernung von M die Linie RS der MP parallel, und durch die Punkte R und M die Secante RT′, so hat man offenbar

$$T'P : MP = MZ : RZ, \text{ und mithin}$$

$$T'P \text{ oder } TP + T'T = MP \frac{MZ}{RZ}.$$

Dies vorausgesezt, stelle man sich vor, daſs RS sich selbst parallel fortrücke, und sich der Linie MP beständig nähere, so ist klar, daſs der Punkt T′ sich zugleich dem Punkte T nähern wird, und daſs man folglich die Linie T′T so klein, als man nur will, wird machen können, ohne daſs deswegen die oben aufgestellte Proportion Statt zu finden aufhörte. Wenn man demnach diese Gröse T′T in der eben gefundenen Gleichung ausser Acht lässet, so wird daraus in der Gleichung $TP = MP \frac{MZ}{RZ}$ in welche alsdann die erste sich verwandelt, in der That ein Irrthum entstehen, aber man wird diesen Irrthum so klein machen können, als man nur will, dadurch, daſs man RS so nahe als nöthig ist, zu MP rücken lässet; d. h. das Verhältniſs der beiden Seiten dieser Gleichung

wird von dem Verhältnisse der Gleichheit so wenig, als man nur will, unterschieden seyn können.

Man hat ferner (§. 3.) $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$, und diese Gleichung ist vollkommen genau, was für ein Lage der Punkt R haben mag, d. h. was auch immer die Werthe von MZ und RZ seyn mögen.

Aber je mehr die RS sich der MP nähert, desto kleiner werden die Linien MZ und RZ seyn. Wenn man sie daher in dem zweiten Gliede dieser Gleichung ausser Acht läſst, so kann der Irrthum, der daraus in der Gleichung $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, auf welche jene als- [illegible]hn gebracht wird, entsteht, eben so, wie der erste, so klein gemacht werden, a[illegible] dem Zwecke angemessen findet.

Da sich dieses so verh[illegible] behandle ich die zwei gefundenen Gleichungen

$$TP = y\,MP \frac{MZ}{RZ}, \text{ und } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

ohne auf Irrthümer Rücksicht zu nehmen, welche so sehr, als ich nur will, zu vermindern, ich immer Macht behalte, als ob jede vollkommen genau wäre. S[illegible] ich nun in der ersten den in der lezten erhaltenen Werth von $\frac{MZ}{RZ}$, so erhalte ich zum Resultate $TP = \frac{y^2}{a-x}$, wie oben.

Dies Resultat ist vollkommen genau, weil es mit dem übereinstimmt, das man durch Vergleichung der Dreiecke CPM, MPT erhalten hat; und gleichwohl sind die Gleichungen $TP = y \frac{MZ}{RZ}$ u. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ woraus man es gezogen hat, zuverläſsig beide falsch, weil die Entfernung der Linien RS und MP weder als $= 0$, noch als sehr klein, sondern einer willkührlichen Linie gleich angenommen worden ist. Es ist also nothwendig, daſs durch die Vergleichung

der zwei falſchen Gleichungen die Irrthümer einander müſſen aufgehoben haben.

§. 10. Dieſe Aufhebung der Irrthümer iſt alſo eine ſtrenge erwieſene und völlig ins Reine gebrachte Thatſache; und es iſt jezt nur noch darum zu thun, ſie zu erklären, das Zeichen aufzuſuchen, woran man erkennen kann, daſs dieſe Aufhebung in Rechnungen, die der vorigen ähnlich ſind, Statt haben, um die Mittel anzugeben, ſie in jedem beſonderen Falle zu bewirken.

Zu dieſer Abſicht iſt es nun genug, zu bemerken, daſs, da die in den Gleichungen $TP = y \frac{MZ}{RZ}$ u. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ [illegible]enen Irrthümer, ſo klein gemacht werden kö[illegible]als man will, derjenige, welcher in der aus jene[illegible]eleiteten Gleichung $TP = \frac{y^2}{a-x}$ Statt fände, wenn ſich einer darin fände, gleichfalls ſo klein gemacht werden könnte, als man wollte, und daſs er von der willkührlichen Entfernung der Linien MP, RS abhienge. Allein dies iſt nicht der Fall, weil, wenn der Punkt M gegeben iſt, durch welchen die Tangente gehen muſs, unter den Gröſen a, x, y, TP dieſer Gleichung keine willkührliche iſt; fol[illegible]h kann bei dieſer Gleichung in der That kein Irrthum Statt finden.

Hieraus folgt, daſs die Aufhebung der Irrthümer, die ſich in den Gleichungen $TP = y \frac{MZ}{RZ}$, u. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ fanden, in dem Reſultate durch die Abweſenheit der Gröſen MZ, RZ, die dieſe Irrſhümer verurſachten, ſich zu erkennen gebe, und daſs man alſo, nachdem man dieſe Gröſen um die Ausdrückung der Bedingungen der Aufgabe zu erleichtern, in die Rechnung eingeführt, und ſie in den Gleichungen, die dieſe Bedingungen ausdrückten, um ſolche zu vereinfachen,

in Vergleichung mit den vorgegebenen Gröſsen, als Nullen behandelt hat, nichts weiter zu thun habe, als eben diese Gröſsen aus den Gleichungen, worin sie sich noch finden mögen, wegzuschaffen, um die Irrthümer, welche sie veranlasset hatten, zu entfernen, und ein völlig genaues Resultat zu erhalten.

§. 11. Der Erfinder konnte daher durch eine sehr einfache Schluſsreihe auf seine Entdeckung geleitet werden. Wenn ich, konnte er sagen, in der Rechnung an Statt einer vorgegebenen Gröſse eine andere ſeze, die ihr nicht gleich ist, so wird daraus ein Irrthum entstehen; wenn aber der Unterschied der Gröſsen, deren eine für die andere gesezt worden, willkührlich ist, und ich Vollmacht habe, ihn so klein zu machen, als ich will, so kann dieser Irrthum nicht gefährlich werden; ich kann sogar mehrere ähnliche Irrthümer zugleich begehen, ohne daſs ein Nachtheil daraus entstünde, weil ich über den Grad der Genauigkeit, den ich meinen Resultaten geben will, immer Herr bleibe. Ia noch mehr; es könnte geschehen, daſs diese Irrthümer einander aufhöben, und daſs auf solche Art meine Resultate vollkommen genau würden. Aber wie ist diese Aufhebung zu bewerkstelligen, und zwar in allen Fällen? Dies zu entdecken war ein geringes Nachdenken zureichend. Wir wollen, konnte der Erfinder sagen, auf einen Augenblick annehmen, daſs die gesuchte Aufhebung wirklich Statt habe, und zuſehen, durch was für ein Zeichen sie in dem Resultate der Rechnung sich zu erkennen geben müsse. Nun ist kein Erfolg natürlicher als der, daſs, wenn die Gröſsen, welche diese Irrthümer veranlasseten verschwunden sind, die Irrthümer selbst gleichfalls verschwunden seyn müssen. Denn da diese Gröſsen, (wie MZ, RZ,) nach der Vorausſezung, willkührliche Werthe sind, so müssen sie nicht mehr in den Formeln oder Resultate

kommen, welche das nicht sind, sondern, da sie, nach der Voraussezung, genau geworden sind, einzig von der Natur der Dinge, deren Verhältniſs, wie solches durch diese Resultate ausgedrückt wird, zu finden, man sich vorgesezt hatte, und nicht von der Willkühr des Rechners, abhangen. Demnach ist das Zeichen, welches zu erkennen giebt, daſs die verlangte Aufhebung Statt habe, die Abwesenheit der willkührlichen Grösen, welche diese Irrthümer verursachten; und folglich braucht man, um diese Aufhebung zu bewerkstelligen, nichts weiter zu thun, als diese willkührlichen Grösen wegzuschaffen.

§. 12. Um diese Ideen noch näher zu bestimmen, und den Grundsäzen, welche daraus herfliessen, den erforderlichen Grad von Genauigkeit und Allgemeinheit zu geben, bemerke ich, daſs die Grösen, die wir bei der abgehandelten Aufgabe zu betrachten hatten, in zwei Klassen getheilt werden können, deren eine die Grösen enthält, die wie MC, MP, PT, MT gegeben, oder durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmt sind, die andere aber diejenigen, welche, wie RS, RT′, ST′, von der willkührlichen Lage des Punkts R abhangen und zugleich so beschaffen sind, daſs, in eben dem Maase, als dieser Punkt R sich dem Punkte M nähert, jede von ihnen sich der ihr zugehörigen in der ersten Klasse nähert, so daſs z. B MP die Gränze von RS, d. h. der bestimmte Werth ist, welchem die leztere sich beständig nähert, oder, wenn man will, der lezte Werth von dieser; eben so ist MT die Gränze oder der lezte Werth von RT′, und PT der von ST′. Aus gleichem Grunde ist es klar, daſs die Gränzen oder lezten Werthe von MZ, RZ, MR, T′T alle = 0 sind; endlich ist es auch einleuchtend, daſs das lezte Verhältniſs von RS zu MP, d. h. der lezte Werth von $\frac{RS}{MP}$ eben so wie das von RT′ zu MT, das

von ST' zu PT, oder überhaupt das von jeder andern Gröse zu ihrer Gränze ein Verhältniſs der Gleichheit ist.

§. 13. Wir wollen uns nun, um diese Bemerkungen auch auf andere Aufgaben eben dieser Art auszudehnen, ein System gegebener Grösen vorstellen, deren Verhältnisse zu einander gesucht werden sollen. (*)

(*) Ich seze hier voraus, daſs die aufgegebene Frage vorläufig auf die Form gebracht sey: die Verhältnisse, welche zwischen diesen oder jenen gegebenen Grösen Statt haben, zu finden.

Wenn es z. B. darauf ankommt, eine krumme Linie von einer gewissen bestimmten Eigenschaft zu finden, so seze ich voraus, daſs man diese Aufgabe vorläufig auf die Form gebracht habe, das Verhältniſs zu finden, welches zwischen dieser oder jener Ordinate dieser krummen Linien und der ihr zugehörigen Abscisse Statt hat. Eben so, wenn es darauf ankommt, eine Tangente an einen unbestimmten Punkt dieser krummen Linie zu ziehen, fange ich damit an, daſs ich den Punkt, durch welchen ich diese Tangente ziehen will, nach Willkühr fest seze, und hierauf bringe ich die Anfgabe auf die Form: das Verhältniſs zu finden, welches z. B. zwischen der Subtangente und der Abscisse, oder zwischen der Ordinate und der zu eben diesem Punkte gehörigen Subnormallinie Statt hat. Wenn man mich aber z. B. fragte, wie ich meine Erklärung des Unendlichen, die man nun bald finden wird, auf folgende Frage anwenden wollte: Ist die Materie ins Unendliche theilbar? Ist der Raum worin alle erschaffenen Dinge sich befinden, unendlich? und andere dergleichen mehr, so würde ich antworten: Meine Erklärung sey blos eine Erklärung des mathematischen Unendlichen, und blos auf solche Fragen anwendbar, die einzig zum Gegenstande haben, die Verhältnisse zwischen diesen oder jenen Grösen zu finden, und mithin

§. 14. Fürs erste werde ich unter dem Namen der *Hauptgrösen* (quantités designées) nicht blos alle Grösen begreiffen, die durch den Ausdruck der Aufgabe selbst gegeben sind, sondern auch alle diejenigen, welche blos von diesen Grösen abhangen, d. h., welche Functionen eben dieser Grösen und einer andern sind.

§. 15. Hingegen werde ich *Neben* - oder *Hülfsgrösen* (auxiliaires) alle diejenigen nennen, welche keinen Theil des Systems der Hauptgrösen ausmachen, und folglich nicht wesentlich in die Rechnung kommen müssen, sondern blos, um die Vergleichung der gegebenen Grösen zu erleichtern, in dieselbige eingeführt werden.

So sind in dem obigen Beispiele MP, MC, MT, DP etc. *Hauptgrösen*, weil sie einzig von der Lage des Punkts M, durch welchen die Tangente gezogen werden soll, abhangen, dagegen sind RS, und alle die, welche davon abhangen, wie MZ, RZ, T'T, T'P u. s w. *Hülfsgrösen*, weil man blos, um die Auflösung der Aufgabe: das Verhältniſs von MP zu TP zu finden, zu erleichtern, darauf gefallen ist, sie zu ziehen.

Daraus folgt offenbar, daſs bei jeder Hülfsgröse nothwendig etwas willkührliches ist; denn wenn nichts willkührliches darein käme, so wäre ihr Werth durch die Bedingungen der Aufgabe selbst bestimmt, und hienge folglich lediglich von den gegebenen Grösen ab, welches der Voraussezung widerspricht.

---

gehören die vorerwähnten mataphysischen Fragen, wenn sie auch den Namen der Fragen verdienen, keineswegs vor den Gerichtshof der Theorie, deren Grundlage aufzustellen man hier zur Absicht hat.

§. 16. Wenn in der Mathematik zwei Linien, zwei Flächen, zwei Körper, oder zwei Grösen überhaupt, sich einander beständig durch unmerkliche Stufen nähern, so daſs ihr Verhältniſs oder Quotient immer weniger und weniger, und so wenig, als man will, von der Einheit unterschieden ist, so sagt man, diese zwei Grösen haben zum lezten Verhältnisse ein Verhältniſs der Gleichheit.

§. 17. Wenn die eine dieser Grösen eine Hauptgröse ist, so heiſst die erste die *Gränze*, oder der *lezte Werth* der zweiten; eine *Gränze* ist also nichts anders, als eine Hauptgröse, welcher eine Hülfsgröse sich beständig nähert, so daſs sie von ihr so wenig, als man will, unterschieden seyn kann, und daſs das lezte Verhältniſs beider ein Verhältniſs der Gleichheit ist.

Demnach findet das, was ich eine Grenze nenne, eigentlich zu reden, nur allein bei den Hülfsgrösen Statt; denn da von den Hauptgrösen angenommen wird, daſs sie sich nicht ändern, sondern vielmehr selbst die Gränzen oder lezten Werthe der Hülfsgrösen seyen, so können sie, die Sache genau genommen, keine Gränzen haben, wofern man nicht sagen will, eine jede Hauptgröse sey ihre eigene Gränze, was man freilich nicht in Abrede stellen kann, weil der lezte Werth einer jeden Hauptgröse nichts anders, als diese Gröse selbst seyn kann.

§. 18. Wir nennen also überhaupt lezte Werthe und lezte Verhältnisse der Grösen die Werthe oder Verhältnisse, welche in der That die lezten von denen sind, die das Gesez der Stetigkeit diesen Grösen und ihren Verhältnissen anweiset, wenn man sezt, daſs jede von ihnen sich beständig, und durch unmerkliche Stufen, der ihr zugehörigen Hauptgröse nähere.

§. 19. Man nennt überhaupt eine *unendlich kleine* Gröse den Unterschied einer Hülfsgröse von ihrer Gränze; so ist z. B. RZ, der Unterschied von RS u. MP, eine unendlich kleine Gröse.

§. 20. Hingegen nennt man jede Gröse, die dem Quotienten gleich ist, der entsteht, wenn die Einheit durch eine unendlich kleine Gröse dividirt wird, *unendlich* oder *unendlich groſs*; von dieser Art ist also die Gröse $\frac{1}{RZ}$ oder $\frac{1}{RS - MP}$.

Da aber MP die Gränze oder der lezte Werth von RS ist, so ist klar, daſs o die Gränze oder der lezte Werth von RZ, oder von RS — MP, u. daſs $\frac{1}{o}$ die von $\frac{1}{RZ}$ ist.

§. 21. Man kann also im Allgemeinen sagen, eine unendlich kleine Gröse sey nichts anders, als eine Gröse, deren Gränze o, eine unendlich grose Gröse hingegen sey nichts anders, als eine Gröse, deren Gränze $\frac{1}{o}$ ist.

§. 22. Unter dem Namen der *unendlichen* Grösen begreift man sowohl die unendlich grosen, als die unendlich kleinen Grösen; alle übrigen Grösen hingegen werden *endliche* genannt.

§. 23. Wenn man also, nach dem gemeinen Gebrauche, sagt, unendlich sey das, was keine Gränzen hat, was ohne Gränzen ist, oder wovon es keine Gränze giebt, so giebt man davon einen einfachen Begriff, der nicht ungegründet ist, weil in der That alle unendliche Grösen solche Gränzen haben, die keine wahre Grösen sind, indem die eine Gattung o, die andere $\frac{1}{o}$ zur Gränze hat.

§. 24. Daraus aber, das o und $\frac{1}{o}$ die Gränzen dieser Grösen sind, folgt keineswegs, daſs diese Grösen selbst eingebildete Dinge seyen. Denn, nach der

der Erklärung (§. 19.) ist eine unendlich kleine Gröse der Unterschied zweier sehr wirklichen Grösen, nämlich einer Hülfsgröse und ihrer Gränze.

§. 25. Hieraus folgt ferner, daſs man jede unendlich kleine Gröse als den Unterschied zweier Hülfsgrösen betrachten könne, die einerlei dritte Hauptgröse zur Gränze haben; Denn es seyen X und Y zwei verschiedene Hülfsgrösen, die einerlei dritte Gröse A zur Gränze haben, so behaupte ich, daſs X — Y eine unendlich kleine Gröse sey.

Da nämlich die Gränze oder der lezte Werth sowohl von X als von Y ist A, so folgt, daſs der lezte Werth von X — Y ist A — A oder o. Folglich ist von A + (X — Y) die Gränze A, und mithin kann man X — Y als den Unterschied einer Hülfsgröse A + (X — Y) von ihrer Gränze A betrachten. Dieser Unterschied ist (§. 19.) eine unendlich kleine Gröse; und man kann also überhaupt sagen, eine unendlich kleine Gröse sey nichts anders, als *der Unterschied zweyer Hülfsgrösen, die einerlei Gränze haben.*

§. 26. Zwei Grösen können nicht einerlei dritte Gröse zur Gränze haben, ohne zu ihrem lezten Verhältnisse ein Verhältniſs der Gleichheit zu haben. Denn da, nach der Voraussezung sowohl von $\frac{X}{A}$, als von $\frac{Y}{A}$ die Gränzen oder der lezte Werth ist 1, so ist klar, daſs von $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)}$ die Gränze, oder der lezte Werth auch ist 1. Nun ist aber $\frac{\left(\frac{X}{A}\right)}{\left(\frac{Y}{A}\right)} = \frac{X}{Y}$; folglich ist von $\frac{X}{Y}$ die Gränze, oder der lezte Werth 1, d. h. das lezte Verhältniſs von X zu Y ist ein Verhältniſs der Gleichheit. Folglich kann man überhaupt sagen, eine *unendlich kleine*

Gröſe sey das Verhältniſs des Unterschieds zweier Grösen, die zum lezten Verhältnisse ein Verhältniſs der Gleichheit haben zu jeder dieser Grösen.

§. 27. Endlich ist es einleuchtend, daſs man auch sagen kann, eine *unendlich kleine Gröse* sey nichts anders, als *eine Hülfsgröse, der man anfänglich einen willkührlichen Werth giebt, und die man in der Folge nach und nach bis auf 0 abnehmen läst.* *) Wenn man also sagt, es sey z. B. Z. eine unendlich kleine Gröse, so ist dies gerade so viel, als wenn man sagte, es sey Z irgend eine willkührliche Gröse (folglich eine Hülfsgröse, da die Hauptgrösen nicht willkührlich seyn können) von welcher man annimmt, daſs sie beständig fort bis auf 0 abnehme.

§. 28. Eine Gröse heist unendlich klein *in Beziehung auf eine andere* Gröse, wenn das Verhältniſs der ersten zur zweiten eine unendlich kleine Gröse ist, und umgekehrt heist alsdann die zweite unendlich oder unendlich gros *in Beziehung auf die erste.*

§. 29. Man sagt von zwei Grösen, ihr Unterschied sey unendlich klein, oder die eine sey von der andern unendlich wenig unterschieden, wenn das

(*) Eben so erklärt sich *Euler* darüber in jener merkwürdigen Stelle der Vorrede zu seiner Differentialrechnung, wo er sagt: „Es ist nicht nur verstattet, sondern es ist selbst der Natur der Sache gemäs, die Zunahmen (der veränderlichen Grösen) anfänglich als *endlich* zu betrachten, und auch in den Figuren, wenn man deren zur Erläuterung der Sache bedarf, endlich vorzustellen; Hernach aber stelle man sich vor, diese Zunahmen werden immer kleiner und kleiner, so wird man finden, daſs ihr Verhältniſs einer gewissen *Gränze* sich immer mehr und mehr nähere, die es aber nur dann erst erreicht, wenn sie gänzlich verschwinden. Diese *Gränze* nun, welche gleichsam das *lezte Verhältniſs* jener Zunahmen bestimmt, ist der eigentliche Gegenstand der Differentialrechnung. H.

Verhältniſs der einen zur andern von der Einheit nur um eine unendlich kleine Gröse unterschieden ist, so daſs ihr leztes Verhältniſs ein Verhältniſs der Gleichheit ist; von dieser Art sind offenbar RS und MP.

§. 30. Die Kunst, welche vermittelst der Grösen, die ich unendliche genannt habe, die Verhältnisse oder Beziehungen entdecken lehrt, die zwischen den verschiedenen Theilen eines jeden Systems gegebener Grösen Statt finden, nennt man die *Infinitesimalrechnung.*

Da alle diese unendliche Grösen nichts anders, als Hülfsgrösen, d. h. solche Grösen sind, die, blos um die Ausdrückung der vorgegebenen Bedingungen zu erleichtern, in die Rechnung eingeführt worden sind, so ist klar, daſs es um das verlangte Resultat, d. h. die gesuchten Verhältnisse, zu erhalten, schlechterdings nothwendig ist, sie wieder aus der Rechnung wegzuschaffen. Daher kann man gewissermassen sagen, die Rechnung des Unendlichen sey eine *nicht geendigte* oder noch unvollendete Rechnung; weil sie in der That von dem Augenblicke an, da man die Hülfsgrösen, die nicht wesentlich darein gehören, daraus weggeschafft hat, aufhört Rechnung des Unendlichen zu seyn, und in allem der gewöhnlichen algebraischen Rechnung gleich wird. (*)

Um die vornehmsten der auf die Theorie des Unendlichen überhaupt sich beziehenden Kunstwörter vollständig zu erklären, muſs ich noch angeben, was ich unter einer *unvollkommenen Gleichung* verstehe.

(*) Jedermann weiſs in der That, daſs eine Rechnung, worin sich unendliche Grösen befinden, nicht für geschlossen angesehen wird, und daſs man sich auf die Genauigkeit des Resultats nicht eher verläſst, als von dem Augenblicke an, da alle diese unendliche Grösen völlig weggeschafft sind.

§. 31. Eine *unvollkommene Gleichung* nenne ich jede Gleichung, deren beide Seiten ungleiche, aber unendlich wenig von einander unterschiedene Grösen sind, oder, was auf eins hinausläuft, jede Gleichung, deren beide Seiten zwar ungleich sind, aber zum lezten Verhältnisse ein Verhältniſs der Gleichheit haben.

So sind z. B. die (§. 9.) gefundenen falschen Gleichungen $TP = y \frac{MZ}{RZ}$, u. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, unvollkommene Gleichungen, weil die in den genauen Gleichungen, woraus sie gezogen sind, ausser Acht gelassene Grösen, unendlich kleine Grösen sind. Auf die Theorie dieser Art von Gleichungen gründet sich also die Auflösung der oben behandelten Aufgabe und aller übrigen dieser Art. Aus dieser Ursache will ich die Gründe dieser Theorie aufsuchen, welche die Grundlage der Infinitesimalrechnung oder vielmehr die Infinitesimalrechnung selbst ist.

I. Lehrsaz.

§. 32. Wenn man in einer unvollkommenen Gleichung an die Stelle einer der darinn begriffenen Grösen eine andere Gröse sezt, die von ihr unendlich wenig unterschieden ist, oder deren Verhältniſs zur ersten die Einheit zur Gränze, oder zum lezten Werthe hat, so kann die aus dieser Verwandlung entstehende Gleichung keine falsche Gleichung seyn; d. h. sie wird vollkommen genau werden, oder zum wenigsten eine unvollkommene Gleichung bleiben.

Da man, nach der Voraussezung, nichts anders gethan hat, als daſs man an die Stelle einer Gröse eine andere sezte, deren lezter Werth der nemliche ist, und deren Verhältniſs zur ersten die Einheit zur Gränze hat, so ist klar, daſs diese Verwechslung an den lezten Werthen der Seiten der gegebenen Gleichung und an ihrem lezten Verhältnisse nichts ändern

konnte. Nun war nach der Voraussezung dies lezte Verhältniſs vor der Verwechslung, die Einheit, folglich wird sie das auch nach der Verwechslung noch seyn, und mithin behält die Gleichung das Merkmal derer die ich unvollkommene genannt habe, wofern sie nicht völlig genau wird; w. z. e. w.

II. Lehrsaz.

§. 33. Eine Gleichung die blos Hauptgrösen enthält, kann keine unvollkommene Gleichung seyn.

Nach der Erklärung der unvollkommenen Gleichungen sind ihre Seiten ungleich, aber unendlich wenig von einander unterschieden, ihr Verhältniſs nähert sich, so sehr als man will, dem Verhältnisse der Gleichheit; folglich kommt in diese Gleichung eine Gröse, die keinen Theil von dem Systeme der gegebenen Grösen ausmacht. Nach der Voraussezung hingegen enthält die vorgegebene Gleichung blos Hauptgrösen; folglich kann sie nicht von der Art derer seyn, die ich unvollkommene genannt habe; w. z. e. w.

III. Lehrsaz.

§. 34. Iede unvollkommene Gleichung, mit welcher man nur solche Verwandlungen, wie die im ersten Lehrsaze angegebene, vorgenommen, und aus welcher man durch diese Verwandlungen alle Hülfsgrösen weggeschafft hat, ist nothwendig und nach aller Strenge genau.

Denn nach dem ersten Lehrsaze, kann eine solche Gleichung keine schlechterdings falsche, und nach dem zweiten keine unvollkommene seyn, folglich ist sie nothwendig und nach aller Strenge genau.

Zusaz.

§. 35. Alles, was in Beziehung auf die unvollkommenen Gleichungen gesagt worden ist, gilt auf gleiche Art auch von den Proportionen, Säzen und allen Schlüssen, die sich in solche Gleichungen übersezen lassen.

Anmerkung.

§. 36. Dies sind die allgemeinen Gründe, auf welchen die Theorie der Infinitesimalrechnung beruhet. Man sieht aus diesen Gründen, daſs, wenn man die Bedingungen einer Aufgabe durch unvollkommene Gleichungen ausgedruckt, und hernach durch Verwandlungen, wie die im ersten Lehrsaze angegebene, alle Hülfsgrössen aus diesen Gleichungen weggeschafft hat, beim Verlaufe der Rechnung nothwendig eine Aufhebung der Irrthümer müsse bewirkt worden seyn; und daſs der Vortheil dieser Rechnung darinn bestehe, daſs, da die Bedingungen einer Aufgabe nach der Schärfe, und durch genaue Gleichungen, oft sehr schwer auszudrücken sind, die sich durch unvollkommene Gleichungen leicht ausdrücken liessen, sie ein Mittel abgiebt, aus diesen unvollkommenen Gleichungen die nämlichen Resultate und eben so richtige Verhältnisse herzuleiten, als wenn die ursprünglichen Gleichungen wirklich vollkommen genau gewesen wären, und das durch die blose Wegschaffung der Grösen deren Gegenwart diese Irrthümer veranlassete. (*)

(*) *Tschirnhau'en* hatte also wohl nicht so unrecht, wenn er zu *Wolfen* sagte: Die Infinitesimalrechnung sey nicht selbst die wahre Methode, sondern blos eine Abkürzung der wahren Methode. Comm. de Stud. Anal. Math. §. 228. p. 378. H.

Der einfache Grund davon [illegible]er, weil man die Verhältnisse zu entdecken hat, die zwischen mehreren gegebenen Grösen Statt finden. Wenn es nun schwer ist, geradezu solche Gleichungen zu finden, die solche Verhältnisse ausdrücken, so ist es natürlich, zu gewissen vermittelnden Grösen, die ihnen als Vergleichungsglieder dienen, seine Zuflucht zu nehmen; durch dieses Mittel kann man, wo nicht die gesuchten Gleichungen selbst, doch wenigstens andere erhalten, wo die gegebenen Grösen mit diesen Hülfsgrösen vermischt vorkommen, und wo also blos noch die Frage ist, diese leztere wegzuschaffen. Wenn aber überdies die Werthe dieser Hülfsgrösen willkührlich sind, und so klein angenommen werden können, als man will, ohne an den gegebenen Grösen etwas zu ändern, so ist leicht einzusehen, daſs wenn in den Gleichungen, die die gesuchten Verhältnisse ausdrücken, die willkührlichen Grösen mit den gegebenen vermischt vorkommen, jede dieser Gleichungen in zwei andere sich zerlegen lasse, deren eine blos die Hauptgrösen, die andere aber die willkührlichen enthalten wird, ohngefähr so, wie eine Gleichung, die wirkliche und eingebildete Grösen enthält, in zwei andere zerlegt werden kann, deren eine die wirklichen, die andere die eingebildeten in sich begreift. Da man nun blos die Gleichung nöthig hat, welche zwischen den gegebenen Grösen Statt findet, so ist klar, daſs man in Gleichungen, wo diese mit willkührlichen vermischt vorkommen, die Grösen, welche die Rechnung verwickelt machen, ohne Nachtheil ausser Acht lassen könne, da die Irrthümer, welche daher entstehen müssen, blos auf die darin begriffene Gleichung zwischen den willkührlichen Grösen fallen können. Dies ist aber eben das, was bei der Infinitesimalrechnung erfolgt, wann man die Grösen, welche wir unendlich klein genannt haben,

in Ansehung [illegible]ndlichen Grösen, als Nullen behandelt.

Um diese Erklärung noch einleuchtender zu machen, wollen wir das oben abgehandelte Beispiel wieder vornehmen. Wir haben (§. 9.) gefunden

$$TP + T'T = y \times \frac{MZ}{RZ}, \text{ und } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ};$$

zwei Gleichungen, die vollkommen genau sind, was auch die Werthe von MZ und RZ seyn mögen. Leite ich nun aus der ersten dieser Gleichungen den Werth von $\frac{MZ}{RZ}$ her, und seze ihn in der [illegible]ten an die gehörige Stelle, so erhalte ich

$$\frac{TP + T'T}{y} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ},$$

eine genaue Gleichung, die Statt finden muſs, wie man auch immer die Entfernung zwischen den Linien RS und MP annehmen mag.

Nun ist leicht einzusehen, daſs ich dieser Gleichung folgende Form geben kann:

$$\left(\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x}\right) + \left(\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right) = 0,$$

worinn das erste Glied blos gegebene, oder durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmte Grösen, das zweite aber willkührliche enthält, und so klein angegeben werden kann, als man will, ohne an den im ersten Gliede enthaltenen Grösen etwas zu ändern, weil man die Vollmacht hat, die RS der MP so nahe anzunehmen, als man will. Demnach muſs, nach der Theorie der unbestimmten Aufgaben, jedes Glied dieser Gleichungen, einzeln genommen, = o seyn, d. h. diese Gleichung läſst sich in die zwei folgenden zerlegen:

$$\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x} = 0, \text{ und } \frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)} = 0,$$

wovon die erste blos Hauptgrösen, die zweite aber willkührliche enthält. Wir bedürfen aber blos der ersten, weil sie es ist, die uns den gesuchten Werth

von TP giebt, wie wir ihn bereits oben gefunden haben. Wenn wir also auch gleich beim Verlaufe der Rechnung Fehler begangen hätten, so würde doch die Genauigkeit des gesuchten Resultats dadurch keine Schmälerung erlitten haben; und dies ist, dem Erfolge nach, eben das, was sich würde ergeben haben, wenn wir in den ursprünglichen Gleichungen MZ, RZ und T'T, in Ansehung der gegebenen Grösen a, x, y als Nullen behandelt hätten, wir würden in Ausdrückung der Bedingungen der Aufgabe in der That Fehler begangen, aber diese Fehler würden einander aufgehoben haben, und das Resultat, das wir nöthig haben, würde dadurch keineswegs geändert worden seyn.

§. 37. Aus dem eben G[illegible]en ist es leicht zu ersehen, daſs die Analysis d[illegible] Unendlichen nichts anders ist, als eine Anwendung, oder, wenn man will, eine Erweiterung der Methode der unbestimmten Coefficienten; *) Denn nach dieser Methode,

---

(*) Mit diesem Namen bezeichnet man eine durch ihre ausgebreitete Nuzbarkeit und durch den Geist der Erfindung, der sich darinn zeigt, gleichmerkwürdige Methode, deren Erfinder *Des Cartes* ist, und von welcher man in allen Fällen Gebrauch machen kann, wo man die Form eines Ausdrucks, den man eigentlich sucht, schon kennt, und es nur noch darauf ankommt, die Coefficienten desselben zu bestimmen. Folgendes Beispiel wird hinreichend seyn, um solchen, die sie noch nicht kennen, einen Begriff davon zu geben.

Es sey aufgegeben, die Gröse $\frac{\alpha}{\beta + x}$ in eine Reihe zu verwandeln.

Man seze, die Grösen A, B, C, D, E etc. seyen so beschaffen, daſs sie die Gleichung geben

$$\frac{\alpha}{\beta + x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

sage ich, daſs, wenn man eine unendlich kleine Gröſe auſſer Acht läſst, man, eigentlich zu reden, sie nur hinzudenke, nicht, sie = o seze; z. B. wenn ich an Statt der zwei (§. 9.) gefundenen, genauen Gleichungen

---

Diese Voraussezung ist verstattet, weil die Grösen A, B, C etc. alle Werthe bekommen können, welche die Rechnung irgend erfordern mag, und weil die Gröse x auf allen ihren Potenzen nacheinander vorkommt. Die Hauptsache kommt nun darauf an, diese Werthe zu bestimmen. Zu dieser Absicht mutliplicire man die zweite Seite der Gleichung mit dem Nenner $\beta +$ [illegible] ersten, so erhält man

$$\alpha = \begin{cases} A\beta + B[illegible]\,C\beta x^2 + D\beta x^3 + E\beta x^4 + \text{etc.} \\ \quad + Ax\,[illegible]\,Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \end{cases}$$

und wenn man α auf die andere Seite bringt, so wird daraus

$$o = \begin{cases} A\beta + B\beta x + C\beta x^2 + D\beta x^3 + E\beta x^4 + \text{etc.} \\ -\alpha + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \end{cases}$$

Weil nun die zweite Seite der Gleichung auf Null gebracht ist, so kann man annehmen, die unbestimmten Grösen A, B, C etc. bewirken diese Verwandlung, indem die untereinander stehenden Glieder sich gegenseitig aufheben; alsdann erhält man eben so viele Gleichungen, als unbekannte Grösen, und gelangt also zur Bestimmung der Werthe dieser Grösen.

Hier hat man demnach die Gleichungen:

$A\beta - \alpha = o$; $B\beta x + Ax = o$; $C\beta x^2 + Bx^2 = o$; $D\beta x^3 + Cx^3 = o$; $E\beta x^4 + Dx^4 = o$; etc.

Die erste dieser Gleichungen giebt $A\beta = \alpha$, woraus man erhält $A = \frac{\alpha}{\beta}$. Dieser Werth in der zweiten Gleichung gesezt, giebt $B = -\frac{\alpha}{\beta^2}$. Der Werth von B in der dritten Gleichung gesezt, giebt $C = -\frac{\alpha}{\beta^3}$.

$$TP + TT = MP \frac{MZ}{RZ}, \text{ und } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$$

die zwei unvollkommenen

$TP = MP \frac{MZ}{RZ}$, und $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ gebrauche, so weiſs ich sehr wohl, daſs ich einen Fehler begehe, und ich seze sie, so zu sagen, im Sinne, unter der Form $\frac{MZ}{RZ} MP = TP + \phi$, und $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x} + \phi'$; wo ϕ und ϕ' solche Grösen bedeuten, wie sie erforderlich sind, damit diese Gleichungen nach der Strenge Statt haben. Ebenso denke ich bei der Gleichung $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$, die aus den zwei obigen unvollkommenen Gleichungen folgt, unter ϕ'' eine solche Grös hinzu, daſs $\left(\frac{TP}{MP} - \frac{y}{a-x}\right) + \phi'' = 0$ eine genaue Gleichung ist; Aber ich sehe bald, daſs diese lezte Gröſe $\phi'' = 0$ ist, weil sie, wenn sie nicht $= 0$ wären, unendlich klein seyn müste, indem das erste Glied keine unendlich kleine Gröse enthält; dies ist aber unmöglich, wenn nicht jedes dieser Glieder für sich genommen $= 0$ ist; woraus ich den Schluſs ziehe, daſs nach der Strenge $\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$ sey; und folglich sind die Grösen ϕ, ϕ', ϕ'' nicht als Nullen weggelassen, sondern blos um die Rechnung einfacher zu machen, hinzugedacht worden.

Wenn z. B. X eine willkührliche Gröse ist, die so klein werden kann, als man will, und man hat eine Gleichung von dieser Form

$$A + BX + CX^2 + \text{cte.} = 0,$$

Sezt man auf solche Art die Rechnung fort, so erhält man

$$\frac{\alpha}{\beta + x} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha x}{\beta^2} + \frac{\alpha x^2}{\beta^3} - \frac{\alpha x^3}{\beta^4} + \frac{\alpha x^4}{\beta^5} - \text{etc.}$$

und das Gesez der Reihe ist so klar, daſs man sehr leicht die Rechnung so weit, als man will, fortsezen kann. H.

wo A, B, C etc. von X unabhängig sind, so kann diese Gleichung nicht Statt haben, ohne daſs A = o, B = o, C = o, etc. d. h. ohne daſs jedes Glied, für sich genommen, = o ist, wie groſs auch immer die Anzahl dieser Glieder seyn mag. Aus eben dem Grunde ist nun, wenn man überhaupt eine Gleichung von der Form P + Z = o hat, so daſs P eine Function gegebener oder durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmter Grösen, Z hingegen eine Gröse ist, die man so klein, als man will, anzunehmen Vollmacht hat, nothwendig P = o, und Z = o; aber gerade von dieser Beschaffenheit ist die oben gefundene Gleichung

$$\left(\frac{TP}{y} - \frac{y}{a-x}\right) + \left(\frac{T'T}{y} - \frac{yMZ + aRZ - xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right) + o;$$

Folglich ist jedes Glied dieser Gleichung, für sich genommen, = o; man hätte also beim Verlaufe der Rechnung der Grösen T'T, MZ, RZ, die in dem ersten dieser Glieder nicht vorkommen, ausser Acht lassen können, ohne dies erste Glied zu ändern; und mithin ist die Analysis des Unendlichen von der Methode der unbestimmten Coefficienten blos darin unterschieden, daſs man bei den ersten Grösen, die, wenn man sie stehen liesse, einander in dem Resultate immer von selbst aufheben würden, als Nullen behandelt, oder vielmehr beim Verlaufe der Rechnung hinzudenkt, da man hingegen bei der Methode der unbestimmten Coefficienten das Ende der Rechnung abwartet, um die willkührlichen Grösen, welche weggeschafft werden müssen, auszuschliessen. Diese leztere Methode könnte also sehr leicht die Analysis des Unendlichen ergänzen, ohne daſs man nöthig hätte, unvollkommene Gleichungen zu Hülfe zu nehmen, oder beim Verlaufe der Rechnung jemals einen Fehler zu begehen.

§. 38. Es giebt noch ein anderes Mittel, die Analysis des Unendlichen durch die gewöhnliche alge-

gebraische Rechnung zu ergänzen, nämlich die *Methode der Gränzen* oder der *lezten Verhältnisse.* Denn obschon diese Analysis lediglich auf den Eigenschaften der Gränzen und der lezten Verhältnisse beruhet, so ist sie doch von dem, was man eigentlich Methode der Gränzen nennt, darin unterschieden, daſs man bei dieser die Grösen, die wir unendlich kleine genannt haben, wie auch ihre Verhältnisse, nicht besonders in die Rechnung bringt, sondern blos die lezten Werthe dieser Verhältnisse, welche, da sie endliche Grösen sind, aus dieser Methode, wie dies eben gezeigt worden ist, nicht sowohl eine eigene Rechnung, als vielmehr eine blose Anwendung der gewöhnlichen algebraischen Rechnung machen.

Es ist also, wenn man sich darauf einschränkt, in die gemeine Algebra nicht unendlich kleine Grösen, sondern die lezten Verhältnisse dieser Grösen einzuführen, darum zu thun, die Mittel zur Entdeckung der Eigenschaften, Verhältnisse und Beziehungen der Grösen, die ein gegebenes System ausmachen, welche die Analysis des Unendlichen an die Hand giebt, zu ergänzen, und dies ist es, was man eigentlich Methode der Gränzen nennt.

Um den Gang derselben zu erklären, und ihren Geist darzustellen, wollen wir das oben abgehandelte Beispiel noch einmal vornehmen.

Nach dem, was (§. 9.) gesagt worden, ist es klar, daſs, obschon $\frac{MZ}{RZ}$ nicht $= \frac{TP}{MP}$ ist, doch die erste dieser Grösen von der zweiten um desto weniger unterschieden sey, je näher RS der MP ist, d. h. daſs $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$ eine unvollkommene Gleichung sey, daſs aber, (wenn man mit dem Buchstaben L die Gränze oder den lezten Werth bezeichnet,) L. $\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$

eine vollkommene, oder nach der Strenge genaue Gleichung sey.

Eben so kann man beweisen, daſs $L.\frac{MZ}{RZ}=\frac{y}{a-x}$ auch eine vollkommene oder nach der Strenge genaue Gleichung sey; sezt man also diese zwei Werthe von $L.\frac{MZ}{RZ}$ einander gleich, so erhält man $\frac{TP}{MP}=\frac{y}{a-x}$, oder $TP=\frac{y^2}{a-x}$, wie oben. In diese neue Rechnung kommen also nicht die unendlich kleinen Grösen MZ und RZ besonders, auch nicht ihr Verhältniſs $\frac{MZ}{RZ}$, sondern blos dessen Gränze oder lezter Werth $L.\frac{MZ}{RZ}$, welches eine endliche Gröse ist.

§. 29. Wenn diese Methode immer eben so leicht anzuwenden wäre, als die gewöhnliche Analysis des Unendlichen, so könnte sie dieser den Vorzug streitig zu machen scheinen; Denn sie würde den Vortheil haben, auf einem geraden und immer lichtvollen Wege zu den nämlichen Resultaten zu führen, an Statt daſs die leztere uns nur dann erst zur Wahrheit bringt, nachdem sie uns, wenn man so sagen darf, durch das Land der Irrthümer geführt hat.

Aber man muſs gestehen, daſs die Methode der Gränzen einer beträchtlichen Schwierigkeit unterworfen ist, die bei der gewöhnlichen Analysis des Unendlichen nicht Statt findet, und darin besteht, daſs man die unendlich kleinen Grösen bey jener nicht so, wie bei dieser, von einander absondern, und da diese Grösen immer paarweise mit einander verbunden vorkommen, die Eigenschaften, die jeder von ihnen besonders zukommen, nicht in die Combinationen bringen, auch mit den Gleichungen, worin sie enthalten sind, nicht alle Veränderungen vornehmen kann, die zu ihrer Wegschaffung behülflich seyn könnten; und

diese Schwierigkeit ist bei den Operationen der Rechnung selbst viel weniger merklich, als bei den Säzen und Schlüssen, welche diese Operationen einleiten oder ergänzen.

§. 40. Nach dem, was wir (§. 2.) über den Ursprung gesagt haben, den die Analysis des Unendlichen kann gehabt haben, scheint es, daſs die Grösen, die man unendlich klein genannt hat, diese Benennung daher erhalten haben, weil man in der That im Anfange glaubte, man müste, zum Behuf der Rechnungen, wo man davon Gebrauch machte, diesen willkührlichen Grösen Werthe geben, die in der That kleiner wären, als alles, was in die Sinne fallen, und was die Einbildungskraft darstellen kann; aber eine genauere Untersuchung hat uns gezeigt, daſs dies unnüz ist, weil der Erfolg der Rechnung nicht von der Verminderung dieser willkührlichen Grösen, sondern einzig von der Aufhebung der Irrthümer, die sie in dieser Rechnung veranlassen, abhängt.

In der That haben wir an dem abgehandelten Beispiele gesehen, daſs sowohl der Gang, als das Resultat der Rechnung, völlig das nämliche war, was für einen Werth man auch den unendlich kleinen Grösen MZ, RZ geben mochte, und daſs folglich der Charakter der Grösen dieser Art nicht in ihrer wirklichen Kleinheit, sondern vielmehr in ihrer völligen Unbestimmtheit, d. h. in der Eigenschaft liegt, durch die ganze Rechnung hindurch willkührlich, und von den gegebenen Grösen so unabhängig zu bleiben, daſs man immer Vollmacht behält, sie so klein, als man will, zu nehmen, ohne an den Bedingungen der Aufgabe etwas zu ändern.

Die unendlichen Grösen sind also, wie dies schon (§. 24.) bemerkt worden ist, keine eingebildeten Dinge, sondern blos veränderliche Grösen, die

durch die Beschaffenheit ihrer Gränze kenntlich gemacht werden, welche für die unendlich kleinen Grösen o, für die unendlich grosen hingegen $\frac{1}{o}$ ist. Man kann also diesen, so wie jeden andern unbestimmten Grösen, nach und nach verschiedene willkührliche Werthe geben, und von allen diesen Werthen muſs man den lezten nehmen, welcher für die unendlich kleinen Grösen o, für die unendlich grosen hingegen $\frac{1}{o}$ ist.

§. 41. Diese Bemerkung giebt Gslegenheit, das mathematische Unendliche in zwei Arten abzutheilen, nämlich in das *bestimmtere* oder *angebliche* (sensible ou assignable) und in das *absolute* oder *metaphysische* *) welches nichts anders als die Gränze des ersten ist.

Wenn man daher einer unendlich kleinen Gröse einen bestimmten Werth giebt, der nicht = o ist, so ist dieser Werth das, was ich eine *bestimmbare* unendlich kleine Gröse nenne, und die ich auch mit dem Namen einer *unendlich kleinen* ohne Beisaz bezeichnen werde; wenn hingegen dieser Werth der lezte von allen, d. h. wenn er schlechterdings = o ist, so ist er das, was ich eine *absolute* oder *metaphysische* unendlich kleine Gröse nenne, und die ich auch mit dem Namen einer *verschwindenden* bezeichnen werde.

Eine vershwindende Gröse ist also nicht das, was man eine unendlich kleine Gröse überhaupt nennt, sondern blos der lezte Werth einer solchen; es ist nichts

---

(*) Da das metaphysische Unendliche von dem mathematischen der Art nach verschieden ist, folglich nie als eine Art des lezteren angesehen werden kann, so würde der Verfasser diese beide Arten besser durch die Namen des *relativen* und *absoluten* Unendlichen unterschieden haben. H.

nichts anders als ein bestimmter Werth, den man dieser willkührlichen Gröſse, die man eine unendlich kleine überhaupt nennt, so gut, wie jeden andern, geben kann.

§. 42. Die Betrachtung dieser verschwindenden Gröſsen würde fast ganz unnüz seyn, wenn man sich darauf einschränkte, sie in der Rechnung als bloſse Nullen zu behandeln; denn sie würden alsdann zu nichts führen, als zu dem unbestimmten Verhältnisse von o zu o, von dem man nicht sagen kann, daſs es vielmehr der Zahl 2 als der 3 oder jeder andern beliebigen Gröſse gleich sey. Aber man muſs nicht vergessen, daſs diese Nullen hier, als lezte Werthe der unbestimmt kleinen Gröſsen, deren Gränzen sie sind, besondere Eigenschaften haben, und daſs man ihnen die besondere Benennung verschwindender Gröſsen, blos in der Absicht giebt, um anzuzeigen, daſs man von allen Verhältnissen und Beziehungen, deren sie als Nullen fähig sind, blos diejenigen betrachten und in die Combinationen der Rechnung bringen will, die ihnen durch das Gesez der Stetigkeit angewiesen werden, wenn man sich vorstellt, das System der Hülfsgröſsen nähere sich durch unmerkliche Stufen dem Systeme der Hauptgröſsen. Dies ist eben das, was groſse Geometer dadurch ausdrücken zu können glaubten, daſs sie die verschwindende Gröſsen als solche beschrieben, die nicht vor dem Verschwinden, und nicht nach dem Verschwinden, sondern im Augenblicke des Verschwindens selbst betrachtet würden. *)

In dem oben abgehandelten Falle z. B. ist der Bruch $\frac{MZ}{RZ}$ gröſser, als $\frac{TP}{y}$, so lange RS nicht mit MP zusammenfällt; Nur in dem Augenblicke, da

(*) M. s. *Newtoni* Princ. Phil. Nat. Math. L. I. Lemma XI. Schol. Ed. Amstälod, 1723. p. 33. H.

MZ und RZ = o werden, werden diese beyden Brüche einander gleich. Zwar ist alsdann $\frac{MZ}{RZ}$ ebensogut jeder andern Gröſse, als der $\frac{TP}{y}$ gleich, weil $\frac{o}{o}$ eine schlechterdings willkührliche Gröſse ist; aber unter den verschiedenen Werthen, die man der Gröſse $\frac{MZ}{RZ}$ geben kann, ist $\frac{TP}{y}$ der einzige, welcher dem Geseze der Stetigkeit unterworfen, und durch dieses bestimmt ist. Denn wenn man eine krumme Linie construirte, deren Abscisse die unbestimmt kleine Gröſse MZ, und die Ordinate der $\frac{MZ}{RZ}$ proportionirt wäre, so würde die, welche der Abscisse o zugehörte, durch $\frac{TP}{y}$, und nicht durch eine willkührliche Gröſse, dargestellt werden. Dies ist es also, was die Gröſsen, die ich verschwindende nenne, von denen, welche schlechthin Nullen sind, unterscheidet.

Obschon also im Allgemeinen o = 2×o = 3×o = 4×o = etc., so kann man doch von einer verschwindenden Gröſse, wie MZ nicht sagen,

$$MZ = 2\times MZ = 3\times MZ = 4\times MZ = \text{etc.}$$

Denn das Gesez der Stetigkeit kann zwischen MZ und MZ kein anderes Verhältniſs, als das der Gleichheit, und keine andere Beziehung, als die der Identität angeben.

§. 43. Wir haben gesehen, daſs, wenn man unbestimmt kleine Gröſsen in die Rechnung einführt, und sie in Ansehung endlicher Gröſsen ausser Acht läſst, die Gleichungen unvollkommen wurden, und daſs die Fehler, die man dadurch herbeyführte, erst in dem gesuchten Resultate sich aufhoben. Dieser Unbequemlichkeit kann man nun, wenn man will, vermittelst der verschwindenden Gröſsen, ausweichen, welche, da sie nichts anders sind, als die lezten Werthe der zugehörigen unbestimmt kleinen Gröſ-

sen, diesen lezteren so gut, wie jede andere Werthe, beygelegt werden können, und welche, da sie in anderer Hinsicht bloſse Nullen sind, ausser Acht gelassen werden können, wenn sie mit einigen wirklichen Gröſsen verbunden vorkommen, ohne daſs die Rechnung aufhörte vollkommen genau zu seyn.

§. 44. Man kann daher die Analysis des Unendlichen aus zwey verschiedenen Gesichtspunkten betrachten, je nachdem man die unendlich kleinen Gröſsen entweder als wirkliche Gröſsen, oder als bloſse Nullen ansieht. Im ersten Falle ist diese Analysis nichts anders, als eine Rechnung mit Fehlern, die sich aufheben; im andern hingegen ist sie die Kunst, verschwindende Gröſsen unter einander und mit andern zu vergleichen, um aus diesen Vergleichungen die Verhältnisse und Beziehungen herzuleiten, welche zwischen gegebenen Gröſsen Statt finden.

Da diese verschwindende Gröſsen = o sind, so müssen sie in der Rechnung ausser Acht gelassen werden, wenn sie durch Addition oder Subtraction mit einer wirklichen Gröſse verbunden vorkommen; aber sie haben nichts desto weniger, wie wir gesehen haben, Verhältnisse, welche kennen zu lernen von groſser Wichtigkeit ist, Verhältnisse, welche durch das Gesez der Stetigkeit bestimmt sind, dem das System der Hülfsgröſsen in seinen Veränderungen unterworfen ist. Um nun dieses Gesez der Stetigkeit leicht herauszubringen, ist leicht einzusehen, daſs man die befragten Gröſsen in einiger Entfernung von der Gränze, wobey sie völlig verschwinden, betrachten müsse, weil sie sonst zu nichts, als zu dem unbestimmten Verhältnisse von o zu o, führten; aber diese Entfernung ist willkührlich, und hat keine andere Bestimmung, als, die Beurtheilung der Verhältnisse, welche zwischen diesen verschwindenden Gröſsen Statt finden, zu erleichtern; Dies sind eben

die Verhältniſse, auf welche man sieht, wenn man die unendlich kleinen Gröſsen als bloſse Nullen betrachtet, und nicht diejenigen, welche zwischen den Gröſsen Statt finden, die die Gränze, wobey sie verschwinden, noch nicht erreicht haben; Diese Gröſsen, die ich unbestimmt kleine genannt habe, sind nicht dazu bestimmt, selbst in die Rechnung zu kommen, wenn sie aus dem Gesichtspunkte, wovon jezt die Rede ist, betrachtet wird, sondern werden blos gebraucht, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, und das Gesez der Stetigkeit anzugeben, welches die Verhältniſse und Beziehungen der verschwindenden Gröſsen, womit sie zusammen gehören, bestimmt. So werden zwar nach dieser Voraussezung, in der Proportion MZ : RZ = TP : MP die durch MZ und RZ vorgestellten Gröſsen schlechterdings = o angenommen; aber da es eigentlich um ihr Verhältniſs zu thun ist, so muſs man, um dessen Gleichheit mit $\frac{TP}{MP}$ kennen zu lernen, die mit diesen Nullen zusammengehörigen unbestimmt kleinen Gröſsen betrachten, nicht, um sie selbst in die Rechnung einzuführen, sondern, um unter der Benennung von MZ und RZ die verschwindenden Gröſsen, die ihre lezten Werthe sind, in dieselbige zu bringen.

§. 45. Diese Ausdrücke MZ, RZ stellen also hier Nullen vor, und man gebraucht sie blos darum vielmehr unter der Form MZ, RZ, als unter der gemeinen Form o, weil, wenn man sie wirklich unter der leztern Form gebrauchte, man bey den Operationen, worin sie vorkämen, ihren verschiedenen Ursprung, d. h. die verschiedenen unbestimmt kleinen Gröſsen, die mit ihnen zusammengehören, nicht mehr würde unterscheiden können. Nun ist aber die, wenigstens in Gedanken anzustellende, Betrachtung der lezteren nothwendig, um das Gesez der Stetig-

keit aufzufinden, welches das geſuchte Verhältniſs der verſchwindenden Gröſsen, die ſie zu Gränzen haben, beſtimmt, und folglich iſt es weſentlich, ſie nicht aus dem Geſichte zu verliehren, und durch Ausdrücke zu bezeichnen, die ihre Verwechslung verhindern.

§. 46. Die verſchwindenden Gröſsen, welche den Gegenſtand der Infiniteſimalrechnung, unter dieſem neuen Geſichtspunkte betrachtet, ausmachen, ſind in der That Verſtandsdinge; dies hindert aber nicht, daſs ſie nicht mathematiſche Eigenſchaften haben könnten, und daſs man ſie nicht eben ſo gut vergleichen könnte, als man eingebildete Gröſsen vergleicht, die um nichts mehr Wirklichkeit haben. Denn es iſt z. B. eben ſo wahr, daſs $\sqrt{-a} = \sqrt{-b} \times \sqrt{\frac{a}{b}}$, als es wahr iſt, daſs $60 = 20 + 40$. Nun bezweifelt niemand die Genauigkeit der Reſultate, die man durch die Rechnung mit imaginären Gröſsen erhält, ungeachtet ſie nichts, als algebraiſche Formen und Zeichen von Gröſsen ſind, in deren Begriffe eine Ungereimtheit liegt; um ſo viel weniger kann man alſo die verſchwindenden Gröſsen verbannen, die doch wenigſtens Gränzen wirklicher Gröſsen ſind, und ſo zu ſagen, am Rande der Wirklichkeit ſtehen (touchent à l'exiſtence). Was liegt auch daran, ob dieſe Gröſsen eingebildete Dinge ſind, oder nicht, wenn ihre Verhältniſſe das nicht ſind, und dieſe Verhältniſſe das einzige ſind, warum wir uns zu bekümmern haben? Man behält alſo, wenn man die Gröſsen, die wir *unendlich kleine* genannt haben, der Rechnung unterwirft, völlig freye Vollmacht, dieſe Gröſsen als wirkliche Gröſsen, oder als bloſse Nullen zu betrachten; und der Unterſchied zwiſchen dieſen beyden Arten die Frage anzuſehen, beſteht darin, daſs, wenn man dieſe Gröſsen als Nullen betrachtet, die Säze, Gleichungen und Reſultate immer ſtrenge

und genau sind, aber ſich auf Gröſsen beziehen, die Verstandsdinge sind und Verhältniſse ausdrücken, welche zwischen Gröſsen Statt haben, die nicht selbst wirklich vorhanden sind; dahingegen, wenn man die unendlich kleinen Gröſsen als etwas wirkliches betrachtet, alle Säze, Gleichungen und Resultate, zwar wirkliche Gröſsen zu ihrem Gegenstande haben, aber an sich selbst ſalsch, oder vielmehr unvollkommen sind, und zulezt nur durch die Aufhebung ihrer Fehler genau werden, welche übrigens eine nothwendige und untrügliche Folge der Rechnungsoperationen ist.

§. 47. Die bisher erklärte Theorie (métaphysique) giebt leichte Antworten auf alle Einwendungen an die Hand, die gegen die Analysis des Unendlichen gemacht worden sind, deren Grundsaz mehrere Geometer für falsch und trüglich gehalten haben, die aber durch die Menge der Wunder, und durch den Glanz der zahlreichen Wahrheiten, die aus diesem Grundsaze hervorgingen, wenn man so sagen darf, zu Boden geworfen worden sind.

Diese Einwendungen lassen sich auf folgende zurückführen: Entweder sind die Gröſsen, die man unendlich klein nennt, schlechterdings Nullen, oder nicht; denn anzunehmen, daſs es Dinge gebe, die zwischen der Gröſse und der Nulle in der Mitte stehen, wäre lächerlich. Wenn sie nun schlechterdings Nullen sind, so ſührt ihre Vergleichung zu nichts, weil man von dem Verhältnisse o zu o nicht sagen kann, daſs es vielmehr a als b, oder jede andere Gröſse sey. Sind sie aber wirkliche Gröſsen, so kann man sie nicht ohne Fehler als Nullen behandeln, wie solches die Regeln der Analysis des Unendlichen fordern.

Die einfache Antwort ist diese: Weit gefehlt, daſs man die unendlich kleinen Gröſsen weder als etwas wirkliches, noch als Nichts betrachten könnte,

kann man vielmehr im Gegentheile behaupten, daſs man sie, nach Willkühr, als Nullen, oder als wirkliche Gröſsen ansehen könne. Denn diejenigen, die sie als Nullen betrachten wollen, können antworten, die Gröſsen, die sie unendlich kleine nennen, seyen nicht jede Nullen überhaupt, sondern nur Nullen, welche durch ein Gesez der Stetigkeit, das ihr Verhältniſs bestimmt, angegeben werden; unter allen Verhältnissen, deren diese Gröſsen, als Nullen fähig seyen, betrachten sie blos diejenigen, welche durch dieses Gesez der Stetigkeit bestimmt werden; endlich seyen diese Verhältniſse nicht unbestimmt und willkührlich, weil dieses Gesez der Stetigheit z. B. nicht mehrere unterschiedene Verhältnisse oder Differentiale der Abscisse und Ordinate einer krummen Linie angiebt, wenn diese Differentiale verschwinden, sondern ein einziges, nämlich das der Subtangente zu der Ordinate. Auf der andern Seite können diejenigen, welche die unendlich kleinen Gröſsen als wirkliche Gröſsen betrachten, antworten, das, was sie unendlich klein nennen, sey nichts anders, als eine willkührliche und von den gegebenen unabhängige Gröſse, die man, ohne sie = o zu sezen, doch als eine Nulle behandeln könne, ohne daſs daraus in dem Resultate ein Fehler entstünde, weil dieser Fehler, wenn er Statt fände, so wie die Gröſse, die ihn veranlasset hätte, willkührlich seyn würde. Nun sey es einleuchtend, daſs ein solcher Fehler nur bey Gröſsen Statt finden könne, wovon zum wenigsten eine willkührlich sey. Wenn man also zu einem Resultate gelangt sey, das deren nicht mehrere enthalte, und ein Verhältniſs zwischen den gegebenen und den durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmten Gröſsen ausdrücke, so könne man versichern, daſs dies Resultat genau sey, und daſs folglich die Fehler, welche bey Ausdrückung der Bedin-

gungen haben begangen werden müssen, durch eine nothwendige und untrügliche Folge der Rechnungsoperationen haben sich aufheben und verschwinden können.

§. 48. Andere Geometer, wie es scheint, durch die eben beantwortete Einwendung in Verlegenheit gesezt, haben sich schlechthin darauf eingeschränkt, zu beweisen, daſs die Methode der Gränzen, deren Gang in allen Stücken nach der Strenge genau ist, nothwendig zu den nämlichen Resultaten führen müsse, wie die Analysis des Unendlichen. Aber, zugegeben, daſs der Grundsaz dieser Methode sehr lichtvoll ist, kann man sich doch nicht verhehlen, daſs sie blos der Schwierigkeit ausweichen, ohne sie aufzulösen; daſs die Methode der Gränzen nur auf einem beschwerlichen Umwege zu den Resultaten der Analysis des Unendlichen führt, und daſs endlich diese Methode mit der Infinitesimalrechnung sogar nicht einerley ist, daſs sie vielmehr nichts anders als die Kunst ist, die leztere zu entbehren, und durch die gewöhnliche algebraische Rechnung zu ersezen; welche Absicht aber, wie mich dünkt, auf eine einfache Art durch die unbestimmte Analytik erreicht werden könnte. Warum wollte man aber eine dieser Methoden mit Ausschlieſsung der übrigen annehmen, da sie einander wechselseitig Hülfe leisten können? Wir wollen also von allen zusammen Gebrauch machen, sowohl von der eigentlich sogenannten Infinitesimalrechnung, als von der Methode der Gränzen, und der unbestimmten Analytik, je nachdem die Umstände darauf Anzeige thun, und wollen keins der Mittel vernachlässigen, die uns zur Erkenntniſs der Wahrheit führen, oder ihre Untersuchung vereinfachen können.

Ich habe nun noch die Anwendung der bisher erklärten allgemeinen Grundsäze an einigen Beyspielen zu zeigen; und ich will dies so thun, daſs ich zu-

gleich einen Begriff von der Differential- und Integralrechnung gebe; welche, eigentlich zu reden, nichts anders ſind, als die in Ausübung gebrachte Analyſis des Unendlichen ſelbſt.

§. 49. Wenn man der nämlichen veränderlichen Gröſse nach einander zwey unendlich wenig unterſchiedene Werthe beylegt, ſo heiſst der Unterſchied des zweyten dieſer Werthe von dem erſten das *Differential* dieſes erſten Werths.

Es ſey z. B. A M N (F. 2.) eine krumme Linie, in Beziehung auf welche man eine Aufgabe aufzulöſen habe, ſo daſs die Ordinate MP eine von den Hauptgröſsen dieſer Aufgabe ſey. Ich ſeze ferner, daſs man, um die Auflöſung zu erleichtern, der MP parallel und in einer willkührlichen Entfernung von dieſer Ordinate eine Hülfslinie NZ ziehe, und daſs dieſe Linie ſofort der MP ſich beſtändig nähere, bis ſie endlich mit ihr zuſammenfällt; ſo iſt die Linie NO oder NZ — MP (§. 19.) eine unendlich kleine Gröſse. Da ſie nun der Unterſchied der zwey Werthe NZ, MP iſt, die der Ordinate nacheinander gegeben worden, ſo iſt man übereingekommen, ſie in der mathematiſchen Sprache mit dem Ausdrucke: *Differential* der veränderlichen Gröſse MP zu bezeichnen, und in der Rechnung durch das zuſammengeſezte Zeichen, das aus der nämlichen veränderlichen Gröſse und dem vorgeſezten Buchſtaben *d* beſteht, darzuſtellen. Wenn man alſo die Ordinate MP durch *y* ausdrückt, ſo bezeichnet *dy* das Differential von MP.

Aber vorausſezen, wie wir gethan haben, daſs NZ ſich beſtändig der MP nähere, heiſst ebenſoviel, als vorausſezen, daſs AZ ſich auch beſtändig der AP nähere; denn die eine dieſer zwey Vorausſezungen hat die andere zur nothwendigen Folge. Wenn man alſo die Abſciſſe AP durch x

bezeichnet, ſo ist PZ oder MO das Differential von x, und man hat zugleich mit NO = dy, auch MO = dx.

Wenn man ferner NZ = y′ und AZ = z′ sezt, so erhält man y′ = y + dy, und x′ = x + dy; d. h. dy und dx sind nichts anders, als die Zunahmen der zuſammengehörigen veränderlichen Gröſsen y und x, oder die Gröſsen, um welche diese zunehmen, wenn sie in y′ und x′ verwandelt werden.

§. 50. Man gebe nun der Ordinate einen neuen Werth RS, so daſs PZ und ZS. unendlich wenig von einander unterschieden seyen, oder zum lezten Verhältnisse ein Verhältniſs der Gleichheit haben.

Damit dies Statt finde, muſs offenbar, weil schon nach der ersten Voraussezung von der NZ angenommen ist, daſs sie der MP sich beständig nähere, auch die RS der nämlichen Linie MP sich beständig nähern, so daſs sie, wie die NZ zulezt mit ihr zusammenfällt, denn sonst würde offenbar das Verhältniſs von ZS zu PZ welches, nach der Voraussezung, der Einheit sich ohne Ende nähern muſs, sich davon entfernen; die Verhältniſse von NZ zu MP, von RS zu MP, von RS zu NZ und von ZS zu PZ werden also alle das Verhältniſs der Gleichheit zur Gränze haben. Es ist ferner klar, daſs es, vermöge des Gesezes der Stetigkeit mit dem Verhältnisse von RZ zu NO sich ebenso verhalten werde. Demnach muſs, dem oben gegebenen allgemeinen Begriffe von den Differentialgröſsen zur Folge, ZS das Differential von AZ, RZ das von NZ, ZS — PZ, oder NZ — MO das von PZ, und endlich RZ — NO das von NO seyn, so wie NO oder NZ — MP das von MP ist; und mithin muſs man, der in Absicht auf die Bezeichnung der Differentialgröſsen in der

Rechnung getroffenen Uebereinkunft gemäſs, ZS = dx', RZ = dy', ZS — PZ = d (MO), RZ — NO = d (NO) haben. Wir haben aber bereits MO = dx, NO = dy, gefunden; folglich ist ZS — NZ = ddx, RZ — NO = ddy; d. h. die Gröſsen ddx und ddy (welche man auch so schreibt: $\overset{2}{d}x$, $\overset{2}{d}y$) sind die Differentiale der Differentiale von x und y; Der Kürze wegen nennt man sie *zweyte Differentiale*, oder *Differentiale der zweyten Ordnung*, und sagt z. B. $\overset{2}{d}x$ sey das Differential der zweyten Ordnung oder das zweyte Differential von x, und $\overset{2}{d}y$ das von y.

Weil nun von ZS und PZ angenommen ist, daſs sie unendlich wenig von einander unterschieden seyen, so ist ihr Unterschied ddx in Ansehung einer jeden von ihnen unendlich klein (§. 28.) folglich sind die Differentiale der zweyten Ordnung in Ansehung der Differentiale der ersten Ordnung oder der ersten Differentiale unendlich klein. (*)

§. 51. Man kann ebenso auch die Differentiale der zweyten Ordnung der Reihe nach differentiiren, und durch diese Differentiation wird

---

(*) Wenn man, an Statt die neue Hülfslinie RS so zu ziehen, daſs die Linien ZS und PZ unendlich wenig von einander unterschieden sind, sie so zieht, daſs die ZS der PZ genau gleich ist, d. h. so, daſs AP, AZ, AS in arithmetischer Progression stehen, so erhält man ddx = 0, oder dx beständig. Man kann also eins der Differentiale für beständig annehmen; aber daraus, daſs AP, AZ, AS in arithmetischer Progression stehen, folgt nicht, daſs MP, NZ, RS in einer solchen stehen, wenn nicht AMN eine gerade Linie ist; also würde daraus, daſs ddx = 0 gesezt worden, nicht folgen, daſs man auch ddy = 0 hätte.

man Differentiale der dritten Ordnung, durch die Differentiation dieser hingegen solche der vierten Ordnung, und so weiter, erhalten, so daſs dddy oder d^3y das dritte Differential von y ddddy oder d^4y das vierte Differential von y etc. ist.

Nach dem, was so eben von der Entstehung der Differentiale der ersten und zweyten Ordnung gesagt worden ist, ist die Entstehungsart der Differentiale der höheren Ordnungen leicht zu begreiffen; ich will mich also nicht dabey aufhalten, sondern blos noch hinzusezen, daſs diese darauf beruhe, daſs man für jede neue Ordnung jeder veränderlichen Gröſse einen neuen Hülfswerth giebt, so daſs nicht nur jeder dieser neuen Werthe von dem nächst vorhergehenden unendlich wenig unterschieden ist, sondern daſs das nämliche auch bey ihren Differentialen, bey den Differentialen ihrer Differentiale, und so immer fort, Statt findet.

§. 52. Eine Gröſse *differentiiren* heiſst ihr Differential angeben, d. h. wenn z. B. X eine Function von x ist, so heiſst solche differentiiren so viel, als die Gröſse angeben, um welche diese Function wächset, wenn man sezt, daſs x um dx wachse.

Hingegen heiſst eine Gröſse *integriren* oder *summiren* so viel, als von diesem Differentiale auf die Gröſse, durch deren Differentiation es entstanden ist, zurückgehen, und diese leztere Gröſse heiſst das *Integral* oder die *Summe* des gegebenen Differentials. So ist z. B. x das Integral oder die Summe von dx, und dx integriren heiſst nichts anders, als, diese Gröſse x, die die Summe, oder das Integral davon ist, angeben.

Wir haben gesehen, daſs das Differential einer Gröſse in der Rechnung durch ein Zeichen ausgedrückt wird, das aus eben dieser Gröſse und

dem vorgesezten Buchstaben *d* zusammengesezt ist; Umgekehrt ist man übereingekommen, das Integral oder die Summe eines jeden Differentials durch ein Zeichen anzudeuten, das aus eben diesem Differentiale und dem vorgesezten Buchstaben *S* zusammengesezt ist; d. h. z. B. Sdx bezeichnet das Integral oder die Summe von dx; man hat also offenbar x = Sdx.

§. 53. *Differential-* und *Integralrechnung* nennt man die Kunst, die Verhältniſse und Beziehungen, die zwischen gegebenen Gröſsen Statt haben, vermittelst ihrer Differentiale zu finden. Ins besondere bezeichnet man mit dem Namen der Differentialrechnung die Kunst, die Verhältnisse und Beziehungen der Differentialgröſsen zu suchen, und diese sofort durch die gewöhnlichen Regeln der Algebra wegzuschaffen, und mit dem Namen der Integralrechnung die Kunst zu integriren, oder eben diese Differentialgröſsen durch die Operationen wegzuschaffen, welche von einem Differentiale auf sein Integral zu kommen lehren.

Meine Absicht ist hier, nicht eine Abhandlung von diesen Rechnungen zu schreiben, sondern blos die Grundregeln davon anzugeben, und zu zeigen, daſs diese Regeln nichts anders seyen, als eine Anwendung der bisher erklärten allgemeinen Grundsäze.

§. 54. Wir wollen also zuerst sezen, man verlange das Differential der Summe x + y + Z + etc. mehrerer veränderlichen Gröſsen.

Nach der Voraussezung wird aus x, x + dx, aus y, y + dy etc. Folglich wird die gegebene Summe x + dx + y + dy + Z + dZ + etc. sie nimmt also zu um dx + dy + dZ + etc. und diese Zunahme ist eben das, was wir Differential genannt haben.

§. 55. Man verlangt nun das Differential von $a + b + c +$ etc. $+ x + y + Z +$ etc.; wo a, b, c, etc. beständige, und x, y, Z, etc. veränderliche Gröſsen sind.

a bleibt nach der Voraussezung a, b bleibt b, c bleibt c, etc. aus x hingegen wird $x + dx$, aus y wird $y + dy$, etc. Folglich wird die gegebene Summe $a + b + c +$ etc. $+ x + dx +$ etc.; sie nimmt also zu um $dx + dy + dZ +$ etc. und diese Zunahme ist das gesuchte Differential; folglich ist dieses Differential das nämliche, wie wenn keine beständige Gröſse in der gegebenen Summe gewesen wäre.

Man fordert das Differential von ax.

a bleibt, nach der Voraussezung, a, und x wird $x + dx$; folglich wird aus ax, $ax + adx$; es nimmt also zu um adx, und diese Zunahme ist das gesuchte Differential.

§. 56. Man verlangt das Differential von xy.

Nach dem Vorhergehenden sieht man, daſs dieses ist $ydx + xdy + dxdy$, d. h. daſs man hat $d.\, xy = ydx + xdy + dxdy$.

Ich bemerke aber in Ansehung dieser Gleichung, daſs, da dx und dy in Vergleichung mit x und y unendlich klein ist, das lezte Glied dxdy selbst wieder, in Ansehung eines jeden der andern, unendlich klein ist, d. h. daſs der Quotient dieses lezten Glieds durch jedes der andern eine unendlich kleine Gröſse ist. Wenn man ihn also in der vorigen Gleichung ausser Acht läſst, welche alsdann wird $d.\, xy = xdy + ydx$ so ist diese Gleichung das, was ich eine unvollkommene Gleichung genannt habe. Weil aber (§. 31. 34.) die unvollkommenen Gleichungen wie völlig genaue gebraucht werden können, ohne daſs darau

ein Irrthum in dem gesuchten Resultate folgte, so ist es einleuchtend, daſs ich von dieser lezten Gleichung an Statt der ersten Gebrauch machen kann, und da sie einfacher ist, so werde ich bey Gelegenheit vermittelst derselben die Operationen meiner Rechnung abkürzen und erleichtern.

Ich kann also sagen, das Differential einer Gröſse, welche das Product zweyer veränderlichen Gröſsen ist, ist gleich dem Producte der ersten veränderlichen Gröſse in das Differential der zweyten, sammt dem der zweyten veränderlichen Gröſse in das Differential der ersten; und dies ist einer von den Säzen, die ich (§. 35.) unvollkommene genannt habe, d. h. solche, die durch eine unvollkommene Gleichung ausgedrückt werden können, und, so wie diese, zu vollkommen genauen Resultaten führen müssen. (*)

(*) Wenn ich aus der unvollkommenen Gleichung $d. xy \mp xdy + ydx$ eine vollkommen genaue Gleichung herleiten wollte, so würde dies einmal dadurch geschehen können, daſs ich auf der zweyten Seite das fehlende Glied $dxdy$ wiederherstellte. Es könnte aber ausserdem auch auf folgende Art geschehen: ich dividirte z. B. alles durch dy, so erhielte ich die neue unvollkommene Gleichung

$$\frac{d.\,xy}{dy} \mp y\,\frac{dx}{dy} + x;$$

und da (§. 19.) eine Hülfsgröſse von ihrer Gränze unendlich wenig unterschieden ist, so kann ich in der vorigen Gleichung, an Statt $\frac{d.\,xy}{dy}$ sezen lim. $\left(\frac{d.\,xy}{dy}\right)$, und lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ an Statt $\frac{dx}{dy}$, ohne daſs die Gleichung aufhörte unvollkommen zu seyn (§. 32.). Nun wird sie alsdann lim. $\left(\frac{d.\,xy}{dy}\right) \mp y \times$ lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right) \times x$; jede Gränze aber ist, nach der Erklärung (§. 17.) eine Haupt-

§. 57. Durch das nämliche Verfahren, wie bey dem vorigen Beyspiele, wird man die unvollkommene Gleichung finden

$$d.\ xyZ = xydZ + xZdy + yZdx.$$

Ebenso die unvollkommene Gleichung

$$d.\ \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Endlich die unvollkommene Gleichung

$$d.\ x^m = mx^{m-1}dx \text{ etc.}$$

§. 58. Dies sind die Hauptregeln der Differentialrechnung. Nun gehen wir zu denen der Integralrechnung fort, welche die umgekehrte Methode ist.

I°. Weil das Differential von x ist dx, so wird das Integral von dx seyn x, d. h. man wird haben $\int dx = x$. Da aber (§. 55.) das Differential von a + x gleichfalls dx ist, so folgt, daſs das Integral von dx ebensowohl a + x als x allein sey, und daſs überhaupt jedes Differential so viele verschiedene Integrale habe, als man ihm geben will, daſs aber alle diese verschiedene Integrale blos um eine beständige Gröſse unterschieden seyen. Es ist also genug, eins derselben zu bestimmen, und ihm nach Willkühr eine beständige Gröſse beyzusezen, um alle übrigen darzustellen; d. h. alle möglichen Integrale von dx können durch x + A dargeſtellt werden, wenn A eine willkührliche beständige Gröſse bezeichnet.

II°.

---

gröſse. Obschon also dx und dy Hülfsgröſsen sind, so sind doch lim. $\left(\frac{d.\,xy}{dy}\right)$ und lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ Hauptgröſsen; folglich sind alle Glieder der vorigen Gleichung lim. $\left(\frac{d.\,xy}{dy}\right) = y \times$ lim. $\left(\frac{dx}{dy}\right) + x$ Hauptgröſsen, und mithin ist (§. 34.) diese Gleichung nothwendig und völlig genau.

II°. Weil das Differential von $x + y + Z +$ etc. iſt $dx + dy + dZ + $ etc. ſo wird das Integral dieſes Differentials ſeyn $x + y + Z +$ etc. $+ A$, wo A eine willkührliche beſtändige Gröſse vorſtellt.

III°. Da das Differential ſowohl von xy, als von $xy + A$ iſt $xdy + ydx$ (§. 56.); ſo wird umgekehrt das Integral von $xdy + ydx$ ſeyn $xy + A$, wo A eine willkührliche beſtändige Gröſse iſt.

IV°. Ebenſo wird man finden, daſs von $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ das Integral iſt $\frac{x}{y} + A$.

V°. Endlich wird man gleichfalls finden, daſs von $mx^{m-1}dx$ das Integral iſt $x^m + A$, etc.

Dies ſind die Hauptredeln der Integralrechnung; Wir haben nun noch die Anwendung dieſer Regeln und jener der Differentialrechnung an einigen beſondern Beyſpielen zu zeigen, und dies wollen wir ſo kurz als möglich thun.

I. Aufgabe.

§. 59. Wenn eine elliptiſche Curve AMB (Fig. 3.) gegeben iſt, die Subtangente TP zu finden, die einem gegebenen Punkte M dieſer Curve zugehört.

Es ſey AB die groſse Axe der Curve; bezeichnen wir nun die Hälfte dieſer groſsen Axe mit a, die halbe kleine Axe mit b, die Abſciſſe AP mit x, und die Ordinate PM mit y, ſo erhalten wir $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$.

Dies vorausgeſezt, ziehe man eine neue Ordinate NZ der MP unendlich nahe, d. h. man ziehe dieſe Hülfslinie NZ zuerſt in einer willkührlichen Entfernung von der MP, und ſtelle ſich hierauf vor, daſs ſie ſich derſelben beſtändig än-

here, ſo daſs ihr leztes Verhältniſs ein Verhältniſs der Gleichheit ist; so werden die Linien MO, NO (§. 49.) die Differentiale von x und y seyn. Nun geben die ähnlichen Dreyecke

$$\text{TPM, MZO } \frac{TP}{MP} = \frac{MO}{ZO} = \frac{MO}{NO + ZN}.$$

Es ist aber einleuchtend, daſs, je näher NZ der MP kommt, desto mehr ZN in Ansehung der NO abnimmt, und daſs ihr leztes Verhältniſs o ist. Demnach ist ZN in Ansehung der NO unendlich klein, und mithin ist $\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}$ eine unvollkommene Gleichung (§. 31.); d. h. $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$ ist eine unvollkommene Gleichung.

Da aber auf der andern Seite die Gleichung der Curve ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, so erhält man hieraus durch Differentiirung folgende zweyte unvollkommene Gleichung $ydy = \frac{b^2}{a^2}(adx - xdx)$.

Sezt man also in dieser lezteren den aus der ersteren hergeleiteten Werth von dx, so erhält man nach geschehener Reduction,

$$TP = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y^2}{a - x}$$

eine Gleichung, die, da sie keine unendlich kleine Gröſsen mehr enthält, nothwendig und völlig genau ist. (§. 34.)

Andere Auflösung.

§. 60. Wir wollen die gegebene Curve als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, d. h. wir wollen an Statt der gegebenen Curve ein Vieleck von einer beliebigen Seitenzahl nehmen, und hierauf sezen, diese Seitenzahl nehme beständig zu, so daſs das lezte Verhältniſs die-

ses Polygons zu der Curve ein Verhältniſs der Gleichheit sey. Da es schlechterdings unmöglich ist, daſs die Curve genau als ein Vieleck betrachtet werden könnte, so werden die Gleichungen, wodurch ich die Bedingungen der Aufgabe unter dieser Voraussezung ausdrücken werde, nicht genau seyn. Weil aber von dem Vielecke angenommen wird, daſs es sich der Curve ohne Ende nähere, so werden die in diesen Gleichungen etwa befindlichen Fehler so klein werden können, als man will, und mithin werden diese Gleichungen von der Art derer seyn, die ich unvollkommene genannt habe.

Die Dreyecke T′MP, MNO geben also die Gleichung $\frac{T'P}{MP} = \frac{MO}{NO}$;

Sezt man nun TP für T′P, welches unendlich wenig davon unterschieden ist, so erhält man folgende unvollkommene Gleichung

$$\frac{TP}{MP} = \frac{MO}{NO}, \text{ oder } \frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$$

eben so, wie sie oben gefunden wurden, und die, mit der für die Curve verbunden, auch das nämliche Resultat geben wird.

§. 61. Man kann auch noch, wenn man will, auf diese Aufgabe die unbestimmte Analytik anwenden, ohne an dem Gange der Rechnung etwas zu ändern. Nachdem ich nämlich die beyden unvollkommenen Gleichungen $\frac{TP}{y} = \frac{dx}{dy}$, und $2ydy = \frac{b^2}{a^2}(2adx - 2xdx)$ gefunden habe, so seze ich im Sinne, zur einen Seite der ersten, um sie völlig genau zu machen, eine Gröſse ϕ hinzu; ebenso bringe ich in die zweyte eine Gröſse ϕ', die sie gleichfalls völlig genau macht; die hinzugedachten Gröſsen ϕ und ϕ' sind also unendlich klein in Ansehung derer, zu denen man sie im Sinne hinzu-

sezt. Dies vorausgesezt, vergleiche ich die zwey vorigen Gleichungen, ohne auf diese Gröſsen φ, und φ' Rücksicht zu nehmen; da die daraus entstehende Gleichung $TP = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}$ nicht genau seyn kann, so seze ich im Sinne noch eine Gröſse φ'', die sie dazu macht, zu ihr hinzu. Da aber diese Gröſse φ'' unendlich klein seyn muſs, so sehe ich bald, daſs sie schlechterdings = o ist, weil die übrigen Glieder der Gleichung keine unendlich kleine Gröſsen mehr enthalten. Denn, wenn man alle Glieder auf *eine* Seite bringt, so kann die Gleichung, welche alsdann wird

$$\left(TP - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}\right) + \varphi'' = o$$

nach der unbestimmten Analytik nicht Statt finden, ohne daſs jedes ihrer Glieder für sich = o ist; folglich ist $\varphi'' = o$, und

$$TP = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{a - x}, \text{ wie oben.}$$

§. 62. Ueberhaupt ist aus dem bereits Gesagten klar, daſs, wenn man P die Subtangente einer Curve nennt, man die unvollkommene Gleichung habe $P = y\frac{dx}{dy}$; folglich wird man (§. 34.) die genaue Gleichung haben $P = y \times \lim. \left(\frac{dx}{dy}\right)$.

Nennt man den zwischen der Tangente einer Curve an irgend einem Punkte und der zugehörigen Ordinate eingeschlossenen Winkel Z, so hat man offenbar Tang. $Z = \frac{P}{y}$, und Cotg. $Z = \frac{y}{P}$; folglich hat man die unvollkommene Gleichungen Tang. $Z = \frac{dx}{dy}$, und Cotg. $Z = \frac{dy}{dx}$, oder die vollkommene Gleichungen

$$\text{Tang. } Z = \lim. \left(\frac{dx}{dy}\right) \text{ und Cotg. } Z = \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

II. Aufgabe.

§. 63. Man verlangt den Werth, den man der Gröſse x beylegen muſs, damit die Function $\sqrt{2ax - x^2}$ ein Maximum, d. h. gröſser wird, als wenn man der x jeden andern Werth beylegte.

Es sey $\sqrt{2ax - x^2} = y$, oder $y^2 = 2ax - x^2$, und man verzeichne eine Curve, deren Abscisse x und die Ordinate y sey, so wird also die Aufgabe diese seyn, die gröſste Ordinate dieser Curve zu finden. Es sey AMB (Fig. 4.) diese Curve, und MP ihre gröſste Ordinate; da nun von dem Punkte M an gerechnet die übrigen Ordinaten sowohl auf der Seite von A als auf der Seite von B abnehmen, so ist klar, daſs die Tangente der Curve in dem Punkte M der AB parallel seyn müsse. Nennt man also, wie oben, den Winkel, den die Tangente der Curve mit der Ordinate macht, Z, so erhält man für den Punkt M, Cotg. Z = o, oder (§. 62.) lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$.

Ich differentiire also die Gleichung für die Curve, so erhalte ich die unvollkommene Gleichung $y dy = a dx - x dx$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$; daraus aber erhalte ich die vollkommene Gleichung lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a-x}{y}$, oder Cotg. Z $= \frac{a-x}{y}$. Nun muſs man auch haben Cotg. Z = o; folglich ist $\frac{a-x}{y} = o$, oder endlich $a = x$, was zu finden war.

§. 64. Das Verfahren, das man anzuwenden hat, um die gröſste Ordinate einer Curve zu finden, besteht also darin, daſs man die Gleichung differentiirt, daraus den Werth von lim. $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ herleitet, und solchen = o sezt. Gemeiniglich drückt

man diese Regel so aus, daſs man blos sagt, man müsse y differentiiren und $dy = o$ sezen; aber wenn dieser Ausdruck kürzer ist, so ist er dafür auch minder genau.

III. Aufgabe.

§. 65. Eine gegebene Curve hat einen Wendungspunckt, man soll die dazu gehörige Abscisse oder Ordinate bestimmen.

Es sey ABMN (Fig. 5.) die gegebene Curve, AP sey die Abscisse, und MP die Ordinate, die dem gesuchten Wendungspunkte M zugehöre; und es sey eine Tangente MK an diesen Wendungspunkt gezogen, so ist klar, daſs der Winkel KMP ein Minimum, d. h. daſs er kleiner sey, als der Winkel LNZ, der von einer andern Tangente NL und der zugehörigen Ordinate NZ eingeschlossen wird; folglich ist die Tangente des Winkels KMP auch ein Minimum, und seine Cotangente ein Maximum; diese Cotangente aber ist überhaupt (§. 62.) $\lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)$; folglich muſs man (§. 63.) haben $\lim. \left(\frac{d. \lim. \left(\frac{dy}{dx}\right)}{d}\right) = o$, was zu finden war.

Es sey z. B. $b^2y = ax^2 - x^3$ die Gleichung für die gegebene Curve; ich differentiire, und erhalte die unvollkommene Gleichung $b^2dy = 2axdx - 3x^2dx$, oder die vollkommene Gleichung $\lim. \frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 3x^2}{b^2}$; es muſs also $\frac{2ax - 3x^2}{b^2}$ ein Maximum, oder $\lim. \left(\frac{d(2ax - 3x^2)}{dx}\right) = o$ seyn, d. h. man muſs $2a - 6x = o$, oder $x = \frac{1}{3}a$ haben.

IV. Aufgabe.

§. 66. Die Fläche eines parabolischen Abschnitts zu finden.

Es sey AMP (Fig. 6.) dieser Abschnitt. Wenn man nun setzt, die Abscisse AP wachse um eine unendlich kleine Gröſse PZ, so wird dieser Abschnitt zugleich um die Gröſse MNPZ wachsen, d. h. wenn man annimmt, PZ sey das Differential von x, so wird MNPZ das Differential des gesuchten Abschnitts seyn; folglich ist umgekehrt der gesuchte Abschnitt das Integral von MNPZ, d. h. es ist AMP $= \int$ (MNPZ). Fällt man aber das Loth MO auf NZ, so ist klar, daſs das lezte Verhältniſs des Raums MNO zu dem Raume MNPZ $=$ o ist; folglich ist der erste dieser Räume in Ansehung des zweyten unendlich klein; und man hat also die unvollkommene Gleichung MNPZ $=$ MOPZ. Sezt man daher die zweyte dieser Gröſsen an die Stelle der ersten in der genauen Gleichung AMP $= \int$ (MNPZ), so erhält man die unvollkommene Gleichung AMP $= \int$ (MOPZ), oder AMP $= \int ydx$. Die Gleichung für die Curve aber ist, wenn man ihren Parameter P nennt, $y^2 = Px$, woraus man die unvollkommene Gleichung erhält, $dx = \frac{2ydy}{P}$; sezt man also in der ersten dieser unvollkommenen Gleichungen für dx seinen aus der zweyten hergeleiteten Werth, so erhält man diese neue unvollkommene Gleichung AMP $= \int \frac{2y^2dy}{P}$. Aber (§. 58.) hat man, $\int \frac{2y^2dy}{P} = \frac{\frac{2}{3}y^3}{P}$; folglich ist, AMP $= \frac{\frac{2}{3}y^3}{P}$, eine Gleichung die, da sie blos Hauptgröſsen enthält, vollkommen genau seyn muſs; was zu finden war.

Die nämliche Methode läſst sich offenbar auf die Quadratur einer jeden andern Curve anwenden; und es ist leicht sie durch ähnliche Schlüsse auch auf ihre Rectification und auf die Untersuchung aller Körper auszudehnen.

§. 68. Diese kleine Anzahl von Beyspielen mag zureichen, um den Geist der Analysis des Unendlichen begreiflich zu machen. Vergebens werden ihre Gegner sagen, unvollkommene Gleichungen gebrauchen, heiſse die Gewiſsheit der Mathematik vernichten; heiſse Irrthümer in dieselbige aufnehmen. Können wohl diese Irrthümer gefährliche Folgen haben, da man untrügliche Mittel hat, sie wegzuschaffen, und zuverläſsige Zeichen, woran man erkennt, daſs sie weggeschafft sind? Wird man auf die unermeſslichen Vortheile, welche diese Rechnung verschafft, Verzicht thun wollen, aus Furcht, sich auf einen Augenblick von dem genauen Verfahren der Elementargeometrie zu entfernen, oder wird man dem ebenen und bequemen Wege, auf welchem diese Analysis uns zu Entdeckungen führt, einen dornichten Pfad vorziehen wollen, auf welchem es so schwer ist, sich nicht zu verirren? So ist in der That derjenige beschaffen, welchen die Methode der Gränzen darbietet, wenn man von ihm ausschliessend Gebrauch machen will. Denn diejenigen, welche den Begriff der unendlichen Gröſsen verbannen wollen, sind genöthiget, entweder sie durch die gemeine Algebra zu ersetzen, welches unzählige Schwierigkeiten hat, oder sich beständig der Namen des Unendlichgroſsen und Unendlichkleinen zu bedienen, während sie solche, wenn man sagen darf, anschwärzen, und das Daseyn der Dinge selbst, wovon sie Zeichen sind, für erdichtet erklären. Wollte man sagen, man gebrauche diese Worte blos figürlich;

so frage ich, ob sich denn eine figürliche und schwer zu verstehende Sprache für die Einfachheit der Mathematik, und besonders für die Strenge schicke, auf welche man sich stüzen will, um die Theorie des Unendlichen zu verurtheilen? Laufen nicht diese zwey Methoden auf eins hinaus, oder sind sie nicht vielmehr einerley Methode auf verschiedene Art angewandt? Mit *einem* Worte, sind nicht immer die nämlichen Begriffe zu bezeichnen, die nämlichen Verhältnisse auszudrücken? Warum wollte man also nicht auf die deutlichste und einfachste Art diese Begriffe bezeichnen, und diese Verhältnisse ausdrücken?

Zuſäze.

§. 1. So oft auch die Behauptung ſchon wiederholt worden iſt, und noch wiederholt wird, daſs die Unendlichen Gröſsen der Neueren ſchon bey den Alten zufinden ſeyen, und daſs die Infinitesimalrechnung derersteren mit der Exhauſtionsmethode der lezteren einerley ſey, ſo iſt ſie doch ſchlechterdings unrichtig und unerweislich. Gewöhnlich berufen ſich die Vertheidiger jener Behauptung auf das zehnte und zwölfte Buch von *Euklids* Elementen, und auf *Archimeds* Kreismeſſung und ſeine Quadratur der Parabel. Allein ſie verwechſeln dabey Dinge, die himmelweit von einander unterſchieden ſind, nämlich:

1) Die Gleichförmigkeit der Operation bey allen Wiederholungen, ſo viel ihrer nöthig ſeyn mögen, mit der Fortſezung der Operation ins Unendliche. Nur das erſte wollen die Alten, wenn ſie vorſchreiben, man ſolle die Wiederholung der Halbirungen oder das Wegnehmen von noch gröſseren Theilen *beſtändig* ſo fortſezen, wie man damit angefangen habe. Daſs man dies jedesmal nur ſo lange zu thun brauche, als es nöthig iſt, verſteht ſich doch wohl von ſelbſt; daſs man aber damit nothwendig einmal zum Ende gelangen müſſe, folgt daraus, weil die gegebene Gröſse, unter welche hinab eine andere gegebene durch dergleichen fortgeſezte Theilungen vermindert werden ſoll, immer

endlich d. h. bestimmt ist. Unmöglich konnten sie also dabey an eine Fortsezzung ins Unendliche denken, und mithin bezeichnet das Wort *ἀεὶ* (*beständig*) hier blos constantiam methodi, seu identitatem operationis, keineswegs aber repetitionem operationis in infinitum continuandam.

2) Das *Angebliche* mit dem *Gegebenen*, die doch offenbar von einander eben so unterschieden sind, wie das Mögliche vom Wirklichen. Denn das Angebliche wird nur dadurch zum Gegebenen, daſs zu seinen übrigen Bedingungen noch das Complementum possibilitatis hinzutritt, wodurch sie erst Realität erhalten. Was die Alten durch ihre fortgesezten Theilungen fanden, war eine Gröſse, die kleiner ist, als jede *Gegebene* (quovis dato minus); diese war immer endlich d. h. bestimmt, weil die gegebene, mit welcher sie verglichen und von welcher sie übertroffen werden muſste, es selbst war. Nie konnte es daher ihnen einfallen, eine solche Gröſse = 0 zu sezen, oder, an und für sich, oder in Vergleichung mit andern als Nichts zu betrachten und ausser Acht zu lassen. Ueberhaupt hatten sie nie eine Veranlassung, diese Gröſsen isolirt zu betrachten, und ihre Eigenschaften und Verhältnisse zu untersuchen; sondern bey ihren Untersuchungen kam alles blos darauf an, sie mit andern gegebenen gleichartigen Gröſsen zu vergleichen. In allen Beweisen dieser Art argumentiren sie daher auch blos aus der bestimmten Gröſse der gegebenen Vergleichungsgröſsen; und jene Gröſsen, die kleiner sind, als jede gegebene, dienen ihnen gleichsam nur als Ruhepunkte, auf welchen sie die Hebel ihrer Erfindungskunst anlegen, um die unbekannten Eigenschaften der Gröſsen, die sie untersuchen, aus dem dunkeln Abgrunde verwickelter Bestimmungen herauszubringen.

Die Neueren hingegen sezen bey ihren Constructionen und Rechnungen Gröſsen voraus, die kleiner als jede *Angebliche* (quovis dabili minus) oder *unendlich klein* sind; sie betrachten solche einzeln, vergleichen sie untereinander, unterwerfen sie allen Operationen des Calculs, untersuchen ihre Eigenschaften und Verhältnisse, alles in der Absicht, um daraus Eigenschaften und Verhältnisse der endlichen Gröſsen, deren gleichzeitige Veränderungen die unendlich kleinen vorstellen, herzuleiten.

3) Die Gröſsen selbst, die bis auf gewisse Gränzen wachsen oder abnehmen, mit ihren Gränzen; z. B. das lezte innere oder äussere Polygon des Kreises mit dem archimedischen Dreyecke, oder dem Kreise selbst.

Nach der Exhaustionsmethode der Alten, nimmt man nicht an, daſs der Kreis einem der darein oder darum beschriebenen Vielecke gleich sey, oder daſs der Unterschied bey der in Ansehung des einen oder des andern ausser Acht gelassen werden können; sondern man behauptet vielmehr, daſs zwischen beiden immer ein wirklicher Unterschied Statt finde, folglich niemals eine von beyden Figuren für die andere genommen werden könne. Da man aber zugleich zeigt, daſs ihr Unterschied kleiner werden könne, als jede gegebene Gröſse, so beweiſst man, aus der Möglichkeit dieser Verminderung, apagogisch, daſs man auf den Kreis, als die Gränze der darein und darum beschriebenen Figuren, mehrere Eigenschaften anwenden könne, die denen ähnlich sind, welche man von den lezteren erwiesen hat. Die in und um den Kreis beschriebenen Vielecke sind also ein Mittel, dessen man sich zu Bestimmung der Eigenschaften des Kreises bedient, nicht, wiefern der lezte für die ersten genommen werden, sondern wiefern er von ihnen weniger,

als um eine gegebene Gröſse unterschieden seyn kann. (*)

Da nun die Alten alle diese Dinge immer mit gleicher Sorgfalt und Genauigkeit unterschieden haben, so bedarf es keiner weiteren Gründe, um die Unrichtigkeit der obigen Behauptung darzuthun. Der Umstand, daſs sich manche von den Beweisen der Alten in die Sprache der Neueren übersezen lassen, spricht so wenig *für* diese Behauptung, daſs er vielmehr als ein neuer Grund *dagegen* angesehen werden muſs, da diese Uebersezung nur vermittelst solcher Wendungen und Voraussezungen geschehen kann, die den Alten ganz fremd sind; wie wenn z. B. die archimedische Quadratur der Parabel auf die Summation einer unendlichen Reihe in einen parabolischen Segmente beschriebener Dreyecke reducirt wird.

§. 2. Geht man dem Ursprunge der Infinitesimalrechnung bis zu ihrem ersten Keime nach, so findet man diesen bey *Keplern*. *Kepler* ist unläugbar der erste (**) Geometer, der es wagte, den Begriff von *unendlich kleinen* Gröſsen, und die Vorstellungsart von der Zusammensezung der ausgedehnten Gröſsen, aus unendlich kleinen Theil-

(*) S. Hrn. L'Huiliers unten mehrmals angeführte Preisschrift. §. LXIV. p. 137.

(**) Den Begriff des Unendlichen findet man zwar schon früher bey *Stifeln* (Arithm. intgr. Norimb. 1544.) wo er fol. 224 sagt: „Mit Recht erklärt man den Kreis durch ein Vieleck von unendlich vielen Seiten. Vor dem Kreise kommen alle Vielecke von einer angeblichen Seitenzahl, so wie vor einer unendlichen Zahl alle angeblichen Zahlen kommen.“ Er macht aber in der Folge keine weitere Anwendung davon.

chen, wie ſolche bey der Infiniteſimalrechnung zum Grunde liegen, in die Mathematik einzuführen.

Als Beleg für dieſe Behauptung und als Probe einer Anwendung jener Vorſtellungsart auf geometriſche Unterſuchungen ſeze ich ſeinen Beweis des 1ten Sazes der archimediſchen Kreiſsmeſſung hieher:

„*Archimedes*, ſagt er, (*) bedient ſich des indirekten Beweiſes, der auf eine Unmöglichkeit führt, worüber von vielen vieles geſagt worden iſt. Mir ſcheint der Sinn der zu ſeyn: Die Peripherie des Kreiſes BG (F. 7.) hat eben ſo viele Theile, als Punkte, d. h. unendlich viele, deren jeder betrachtet werden kann als die Grundlinie eines gleichſchenklichten Dreyecks, deſſen Schenkel der Linie AB gleich ſind, daſs alſo die Kreisfläche unendlich viele Dreyecke enthält, deren Spizen alle in den Punkt A zuſammenfallen. Man ſtrecke nun die Peripherie des Kreiſes BG in eine gerade Linie aus, und es ſey BC ihr gleich, und AB auf ihr lothrecht, ſo werden alle Grundlinien jener unendlich vielen Dreyecke oder Ausſchnitte, in *einer* geraden Linie an einander liegen. Es ſey eine dieſer Grundlinien BF ſo klein, als man will, und die CE ihr gleich, und man verbinde die Punkte F, E, C mit A.

Da nun auf der geraden Linie BC ſo viele Dreyecke ABF, AEC ſind, als in der Kreisfläche Ausſchnitte, und ſie gleiche Grundlinien, BF, EC, und einerley Höhe BA haben, die auch zu den Ausſchnitten gehört, ſo werden die Dreyecke EAC, BAF einander, und jedes wird auch einem Kreisausſchnitte gleich ſeyn, und alle Dreyecke zu-

(*) Nova Stereometria doliorum Lincii 1615. P. I. Theor. II.

sammen, deren Grundlinien in der Linie BC liegen, d. i. das Dreyeck BAC; das aus ihnen allen bestheht, wird allen Kreisausschnitten, d. h. der aus allen bestehenden Kreisfläche gleich seyn. Das will der indirecte Beweis des Archimedes sagen."

Ebenso betrachtete *Kepler* den Kegel als zusammengesezt aus unendlich vielen Pyramiden, die auf den unendlich kleinen Dreyecken, in welche er die Grundfläche desselben zerlegte, stünden, und mit dem Kegel eine gemeinschaftliche Spize hätten; den Cylinder aber über der nämlichen Grundfläche und von der nämlichen Höhe als zusammengesezt aus unendlich vielen kleinen Prismen, über einerley Grundfläche und von einerley Höhe mit jenen, und verwandelte durch diese Vorstellungsart die weitläufigen und verwickelten indirecten Beweise der Alten in directe von ausnehmender Klarheit und Kürze.

§. 3. In noch gröſserer Ausdehnung wurde dieselbe Vorstellungsart in der Folge von *Cavalleri* zur Erweiterung der Geometrie angewandt, (*) welcher bey ebenen Figuren gerade Linien, und bey Körpern Flächen, deren er unbestimmt viele mit einer bestimmten Linie oder Fläche parallel zog, die *untheilbaren Elemente* derselben betrachtete, und in dem Verhältnisse, nach welchem diese Linien oder Flächen wachsen oder abnehmen, das Maas der ebenen oder körperlichen Figuren, oder ihr Verhältniſs zu einander suchte, was Kepler in seinem angeführten Werke, zum Theil auch schon gethan hatte. So viel Schein auch dadurch die Vermuthung gewinnen mag, daſs *Cavalleri* die ersten Gründe seiner Entdeckungen von *Keplern* entlehnt habe, so hat er

(*) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota Bonon. 1653.

doch diesen Verdacht völlig von sich abgewälzt, indem er nicht nur in der Vorrede zu seiner Geometrie, den Weg und die Veranlassung gezeigt hat, wie und wodurch er zu seinen Vermuthungen gekommen, sondern auch nachher in einem spätern Werke (*) die Grundlosigkeit jenes Vorwurfs aus der Verschiedenheit der Gründe von seiner und *Keplers* Methode, und aus der Verschiedenheit des Gangs, den beyde bey den Anwendungen derselben Vorstellungsart genommen haben, befriedigend dargethan hat. Ueberdies hat auch der Theil seiner Aussagen für welchen man eine historische Bestättigung fordern, oder wünschen konnte, solche durch die Bemühung seines Biographen *Friſi* (**) erhalten.

Die Methode des Untheilbaren, wodurch *Cavalleri* die Exhaustionsmethode der Alten zu vereinfachen und zu erweitern suchte, zerfällt in zwey Theile. Der eine beschäftigt sich mit der Vergleichung der Figuren unter einander vermittelst der Gleichheit oder des beständigen Verhältnisses zwischen ihren ähnlichen Elementen; alles was dahin gehört, beruhet auf dem allgemeinen Hauptsaze, daſs alle Figuren, deren Elemente von der Grundlinie oder Grundfläche bis zur Spize auf eine ähnliche Art wachsen, oder abnehmen, zu der gleichförmigen Figur von einerley Grundlinie oder Grundfläche und Höhe, einerley Verhältniſs haben. Der zweyte Theil beschäftigt sich mit der Bestimmung des Verhältnisses dieser wachsenden oder abnehmenden Elemente, zu der Summe aller mit jenen gleichartigen, und unter einander glei-

chen

(*) Exercitatt. geom. Bonon. 1647.

(**) Elogi di *Galileo Galilei* e di *Bonav. Cavalleri* Milano 1778.

chen Elemente. Ein Kegel z. B. besteht nach *Cavalleri's* Sprache aus unendlich vielen Kreisen, die von der Grundfläche nach der Spize zu abnehmen, hingegen der Cylinder von einerley Grundfläche und Höhe aus unendlich vielen einander gleichen Kreisen. Kann man also das Verhältniſs der Summe der unendlich vielen abnehmenden Kreise des Kegels zur Summe der unendlich vielen gleichen Kreise des Cylinders angeben, so hat man eben damit das Verhältniſs des Kegels zum Cylinder selbst. Im Kegel nehmen diese Kreise von der Grundfläche nach der Spize zu ab, wie die Quadrate der Glieder einer arithmetischen Progression. Bey andern Körpern folgen sie einem andern Verhältniſse. Immer aber ist es Hauptzweck dieser Methode, das Verhältniſs dieser Summe der wachsenden oder abnehmenden Glieder, zur Summe aller gleichen Glieder, woraus die gleichförmige und bekannte Figur von einerley Grundlinie oder Grundfläche und Höhe zusammengesezt ist, anzugeben.

§. 4. Den zweyten groſsen Schritt zur Erfindung der Infinitesimalrechnung machte *Fermat*, ein Geometer, dem, um des *Cartes's* Namen zu erlangen, nichts, als des *Cartes's* Muſse fehlte. (*) Er verband, noch ehe die Algebra durch *Harriot's* Bemühungen (**) die verbesserte Gestalt erhalten hatte, in welcher wir sie jezt haben, mit *Keplers* und *Caval-*

(*) Er war Parlamentsrath zu Toulouse und verwaltete dieses Amt mit solcher Treue und Gewissenhaftigkeit, daſs er sich dadurch allgemeine Verehrung erwarb. Er starb schon 1665, seine mathematischen Abhandlungen kamen aber erst 1679 unter dem Titel: Varia opera mathematica zu Toulouse heraus.

(**) Artis analyticae praxis ed. a Walthero Warnero Lond. 1631.

leri's Vorstellungsart von den unendlich kleinen Gröſsen, den algebraischen Calcul, und wandte sie in dieser Verbindung zur Abkürzung der Exhaustionsmethode der Alten, theils noch vor *Des Cartes*, theils zu gleicher Zeit mit ihm, auf Gegenstände der höheren Geometrie, namentlich auf Untersuchungen über die Fragen von den grösten und kleinsten Werthen (Maximis et Minimis) über die Schwerpunkte, Tangenten und Rectificationen der krummen Linien, u. a. m. an.

Seine Methode der gröſsten und kleinsten Werthe, unter welchem Titel er die Methoden, alle vorerwähnten Probleme, nebst mehreren andern, analytisch zu behandeln, zusammenfassete, gründet sich auf den aus *Keplers* Stereometrie entlehnten Saz, daſs, wenn eine Gröſse, z. B. die Ordinate einer Curve, ihr Maximum oder Minimum erreicht hat, in einer unendlich nahen Stelle ihre Zunahme oder Abnahme = o ist. Gesezt nun eine durch eine Gleichung ausgedrückte Ordinate y habe ihr Maximum erreicht, so wird daraus folgen, daſs, wenn man in dieser Gleichung die Abscisse um eine unendlich kleine Gröſse e zu — oder abnehmen läſst, diese beiden Werthe von y einander gleich seyn werden. Wenn man sie also einander gleich sezt, die gemeinschaftlichen Glieder auf beiden Seiten wegnimmt, hierauf durch e, so weit, als es sich thun läſst, dividirt, und endlich die Glieder, worin e^2 sich befindet, weil sie wegen der unendlichen Kleinheit der Gröſse e in Ansehung der übrigen = o sind, wegläſst, so wird man den Werth von x erhalten, zu welchem die gröſste Ordinate gehört.

Gesezt, z. B. es sei die Gleichung für den Kreis $y^2 = 2ax - x^2$, und man kenne die Lage seiner gröſsten Ordinate nicht, so muſs man,

vermöge der eben angeführten Regel in der vorigen Gleichung an Statt x sezen $x + e$, dies giebt
$2ax + 2ae - x^2 - 2ex - e^2$ Diesen Werth muſs man $2ax - x^2$ gleich sezen, so wird
$2ax + 2ae - x^2 - 2ex - e^2 = 2ax - x^2$.

Zieht man nun die beyden Seiten gemeinschaftlichen Glieder davon ab, so erhält man
$2ae - 2ex - e^2 = 0$.

Läſst man in diesem Ausdrucke e^2, als eine unendlich kleine Gröſse, weg, so wird daraus
$2ae - 2ex = 0$, oder $2ae = 2ex$, und mithin $a = x$.

Von dieser sinnreichen Regel machte nun *Fermat* folgende Anwendung zur Bestimmung der Tangenten:

Es sey BD (F. 8.) die Tangente einer Curve z. B. einer Parabel, so ist klar, daſs, ausser der BC, jede andere Ordinate, wie bc, ihr ausserhalb der Curve begegnen werde, und folglich wird das Verhältniſs von $\overline{BC}^2$ zu $\overline{bc}^2$, welches einerley ist, mit dem von $\overline{CD}^2$ zu $\overline{cD}^2$, kleiner seyn, als das von $\overline{CB}^2$ zu $\overline{cb}^2$, oder, als das von CA zu cA. Wenn man aber annimmt, daſs dies Verhältniſs das nämliche sey, und daſs die Entfernung Cc verschwinde, so werden die Punkte b, B zusammenfallen, und man wird eine Gleichung erhalten, welche ebenso, wie bey der Methode der gröſsten und kleinsten Werthe, behandelt, das Verhältniſs von CD zu CA geben wird.

Es sey z. B. in der vorigen Figur, die Abscisse $AC = x$, die Subtangente $CD = Z$, die Entfernung der beyden Ordinaten $Cc = e$, so ist, $Ac = x - e$, und $cD = Z - e$.

Ferner sey der Parameter der Parabel = a. Nun ist, wegen der ähnlichen Dreyecke BCD, bcD, BC : bc = CD : cD, folglich auch

$$\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cD}^2,$$

d. i. $ax : ax - ae = Z^2 : (Z - e)^2$.

Werden hier die äusseren und mittleren Glieder in einander multiplicirt, hierauf die, beyden Seiten gemeinschaftlichen Glieder, so wie die, worin e^2 sich befindet, weggeworfen, die übrigen aber durch e dividirt, so erhält man $2x = Z$, welches der wahre Ausdruck für die Subtangente der Parabel ist.

Montucla (*) bemerkt richtig, daſs *Fermat's* eigene Darstellung von seiner Tangentenmethode nicht die vortheilhafteste sey, und sezt ihr deſswegen noch die folgende bey, die er mit Recht für vorzüglicher hält: Jede Tangente kann man ansehen als eine Secante, deren Durchschnittspunkte mit der Curve sich einander beständig nähern, und endlich zusammenfallen. Man nehme also in unbestimmter Entfernung e (Fig. 9.) zwey Ordinaten BC, bc an, und suche aus der Gleichung für die Curve die Gröſse der Linie CD, oder die Entfernung des Durchschnittspunkts der Secante und der Axe von der Ordinate BC. Dies wird eine Gleichung geben, worin man nur, wie bey der Methode der gröſten und kleinsten Werthe, e unendlich klein anzunehmen braucht, um eine Gleichung zwischen CD und CA zu erhalten, welche das Verhältniſs der Subtangente zur Abscisse angeben wird.

§. 5. Wie überhaupt die Bemühungen der damaligen Geometer — von welchen mehrere und namentlich *Roberval* und *Gregor von St. Vincent* ganz für sich selbst, und ohne von *Keplern* oder *Cavalleri* etwas zu wissen, auf die unendlich kleinen Gröſsen

(*) Histoire des Mathematiques. P. IV. L. II. p. 135. ff.

oder untheilbaren Elemente gekommen zu seyn, glaubwürdig versicherten -- in einer zwar zufälligen, aber nichts desto weniger auffallenden Vereinigung darauf gerichtet waren, die Vorstellung von der Zusammensezung der ausgedehnten Gröſsen aus unendlich kleinen Theilchen in Verbindung mit der verbesserten Analyse zur Erweiterung der Geometrie anzuwenden, und die weitläufigen und indirecten Beweise der Alten dadurch abzukürzen und in directe zu verwandeln; (*) so erfanden auch mehrere von ihnen kurz nach einander ähnliche Tangentenmethoden, worunter in andern Rücksichten, die von *Des Cartes* und *Wallis* angegebenen besonders merkwürdig sind. Für unsern Zweck aber ist durch ihre genaue Verbindung mit der Leibnizischen Differentialrechnung die merkwürdigste die von *Barrow* im Jahr 1670 zuerst bekannt gemachte.

Der Erfinder, ein Geometer, dessen zahlreiche und wichtige Entdeckungen über die Eigenschaften krummlinichter Figuren nur durch die von ihm selbst so sehr vorbereitete und kurz vor seinem Tode (**) noch von Leibnizen bekannt gemachte Erfindung der Infinitesimalrechnung zum Theil in Vergessenheit gebracht werden konnten, stellt, unter vielen Entschuldigungen, daſs er die bereits ansehnlich gewordene Anzahl von dergleichen Methoden noch durch eine neue vermehre, die seinige auf folgende Art dar. (***)

(*) M. s. die schäzbare Dissertation des Hrn. Prof. *Pfleiderers*: *Kepleri* methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata etc. Tubing. 1795. p. 29.

(**) Er starb 1678 zu Cambridge, als Rector des Collegii trinitatis.

(***) Lectt. Optic. et Geom. Lond. 1674. Lect. Geom. X. p. 80. f.

Es seyen AP, PM (F. 10.) der Lage nach gegebene gerade Linien, die MP schneide die gegebene Curve, die TM aber berühre sie in dem Punkte M, hingegen schneide die MT die gerade Linie AP in dem Punkte T. Um nun die Gröſse der Linie PT zu erforschen, nehme ich den Bogen MN der Curve für unbestimmt klein (indefinite parvum) an, und ziehe hierauf die NZ der MP und die NR der AP parallel; ich seze ferner die MP = m, die PT = t, die MR = a, die NR = e. Eben so bezeichne ich die aus der besondern Natur der Curve bestimmten, zu meinem Zwecke brauchbaren geraden Linien, jede mit einem eigenen Namen. Die MR und NR aber, und vermittelst ihrer die MP und PT vergleiche ich durch die aus dem Calcul erhaltene Gleichung mit einander und beobachte dabey folgende Regeln:

1) Beym Verlaufe der Rechnung werfe ich alle Glieder weg, worin eine Potenz von a oder e oder ein Product aus a durch e vorkommt, (denn diese Glieder sind = o.)

2) Wenn die Gleichung formirt ist, so werfe ich alle Glieder weg, die aus Buchstaben bestehen, welche blos bekannte, oder bestimmte Gröſsen bezeichnen, oder worin a oder e nicht vorkommt, (denn diese Glieder werden, wenn man sie zusammen auf *eine* Seite der Gleichung bringt, immer = o. seyn.)

3) An die Stelle von a seze ich m (oder MP) und an die Stelle von e seze ich t (oder PT), so erhalte ich die Gröſse von PT.

Wenn ein unbestimmtes Theilchen einer Curve in die Rechnung kommt, so seze man an seine Stelle ein gehörig bestimmtes Theilchen der Tangente, oder jede andere, (wegen der unbestimmten Kleinheit der Curve) ihr gleiche gerade Linie.

Es sey z. B. ABH (F. 11.) ein rechter Winkel, die Curve AMO aber von der Beschaffenheit, daſs, wenn durch den Punkt A nach Willkühr, die gerade Linie AK gezogen wird, welche die gerade Linie BH in K, die Curve AMO aber in M schneidet, immer die Chorde AM der Abscisse BK gleich ist, und man verlangt, die Tangente der Curve für den Punkt M anzugeben.

Man verfahre nach der obigen Vorschrift, und seze, nachdem ANL gezogen worden, $AB = r$, $AP = q$, so wird $AZ = q - e$, $ZN = m - a$, und man erhält $q^2 + e^2 - 2qe + m^2 + a^2 - 2ma = (\overline{AZ}^q + \overline{ZN}^q = \overline{AN}^q) = \overline{BL}^q$; d. h. wenn man wegwirft, was nach der Vorschrift wegzuwerfen ist,

$$q^2 - 2qe + m^2 - 2ma = \overline{BL}^q.$$ Ferner ist

$$AZ : ZN = AB : BL \text{ d. i. } q - e : m - a = r : \begin{cases} BL \\ \frac{rm - ra}{q - e} \end{cases}$$

Demnach ist $\dfrac{r^2m^2 + r^2a^2 - 2r^2ma}{q^2 + e^2 - 2qe} = \overline{BL}^q$; oder nach Wegwerfung der überflüssigen Glieder

$$\frac{r^2m^2 - 2r^2ma}{q^2 - 2qe} = \overline{BL}^q = q^2 - 2qe + m^2 - 2ma;$$

oder $r^2m^2 - 2r^2ma = q^4 - 2q^3e + q^2m^2 - 2q^2ma$

$$- 2q^3e + 4aq\,e^2 - 2qm^2e + 4qmae$$

d. i. nach Wegwerfung dessen, was, nach der Vorschrift, wegzuwerfen ist,

$$- 2r^2ma = - 4q^3e - 2q^2ma - 2qm^2e,$$ oder

$$r^2ma - q^2ma = 2q^3e + qm^2e,$$ oder endlich, wenn man m statt a, und t statt e sezt,

$$r^2m^2 - q^2m^2 = 2q^3t + qm^2t,$$ oder

$$\frac{r^2m^2 - q^2m^2}{2q^3 + qm^2} = t = PT.$$

§. 6. Kürzer läſst sich *Barrow's* Methode auf folgende Art darstellen:

Um die Gröſse der Subtangente PT (F. 11.) zu finden, betrachte man das kleine Dreyeck MNR, dessen eine Seite MR der Unterschied zweier unbestimmt nahen Ordinaten MP, NZ, die andere NR ihr Abstand, die dritte MN ein unbestimmt kleiner Bogen der Curve ist. Dieses Dreyeck ist dem Dreyecke MPT ähnlich, welches die Ordinate, die Tangente und die Subtangente einschlieſsen. Man suche also aus der Gleichung für die Curve das Verhältniſs der Seiten MR, RN des Dreyecks MRN unter der Voraussezung, daſs der Unterschied der Ordinaten unbestimmt klein sey, und seze endlich die Proportion an: wie sich MR zu RN verhält, so die Ordinate zur gesuchten Subtangente.

Es sey z. B. p der Parameter der Parabel (F. 8.) so hat man für diese die Gleichung $y^2 = px$. Sezt man nun, aus x werde $x + e$, und aus y zu gleicher Zeit $y + a$, so verwandelt sich die vorige Gleichung in diese:

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Zieht man davon die erste $y^2 = px$ ab, so bleibt $2ay + a^2 = pe$, oder, wenn a^2 weggeworfen wird, $2ay = pe$. Daraus aber folgt

$$a : e = p : \begin{cases} 2y \\ 2\sqrt{px} \end{cases}$$

Es verhält sich aber auch a : e wie die Ordinate zur Subtangente; folglich hat man

$$\left.\begin{matrix} a : e \\ p : 2\sqrt{px} \end{matrix}\right\} = \sqrt{px} : 2x,$$

und die gesuchte Subtangente findet sich also wiederum, wie oben, nach Fermats Regel, $= 2x$.

§. 7. So groſs auch die Aehnlichkeit der *Fermatischen* und *Barrowischen* Tangentenmethode ist, so entschieden sind doch die Vorzüge der lezten vor der ersten, sowohl in Hinsicht auf Kürze und Allgemeinheit, als besonders in so ferne, als sie wei-

tere Ausſichten eröfnete. So leitete z. B. *Gregory* aus der Vergleichung dieſer Methode mit ſeiner eigenen eine noch allgemeinere her, wovon er *Collins*, einem gelehrten Engländer, der mit allen damaligen Mathematikern in Verbindung ſtand, in einem Schreiben vom 5ten Sept. 1670 Nachricht gab. Eine ähnliche Methode überſchrieb *Sluſe*, ein niederländiſcher Geometer, im November 1672 an *Oldenburgen*, damaligen Secretär der Societät zu London, und unterm 10ten December eben dieſes Jahrs ſchickte *Newton* die ſeinige an *Collins*, mit der Bemerkung, daſs er ſie ſeinem Lehrer *Barrow* ſchon vor der Erſcheinung der geometriſchen Lectionen deſſelben mitgetheilt hätte, und daſs dieſe Methode blos ein Aſt, oder eine Folge einer viel allgemeineren Methode wäre, die ſich, ohne einen beſchwerlichen Calcul, nicht blos auf Tangenten, ſondern auch auf andere noch verwickeltere Probleme, wie die von den Krümmungen, Flächen, Längen, Schwerpunkten der Curven u. d. m. ſind, erſtreckte, und zwar ohne daſs man genöthiget wäre, die irrationalen Gröſsen aus den Gleichungen wegzuſchaffen. Auch ſezte er noch hinzu, daſs er dieſe Methode mit ſeiner Methode der unendlichen Reihen in Verbindung gebracht hätte.

§. 8. Unterm 21ten Jun. 1677 überſchrieb hierauf *Leibniz*,*) ſeine Tangentenmethode, als die erſte Probe ſeiner Differentialrechnung, durch *Oldenburgs* Vermittelung an *Newton* auf folgende Art:

„Ich bin ganz *Newtons* Meinung, daſs *Sluſens* Tangentenmethode noch nicht vollkommen ſey, und habe ſelbſt ſchon lange her, die Tangenten

---

(*) Leibnitii Opp. ed. Dutens Genev. 1768. Tom. III. p. 80. ff.

viel allgemeiner behandelt, nämlich durch die *Differenzen der Ordinaten.*

In (F. 12.) ist nämlich TB : BC = CD : DC′, d. h. es verhält sich der auf der Axe genommene Abstand der Tangente von der Ordinate zu der Ordinate, wie die Differenz der Abscissen AB, AB′, zur Differenz der Ordinaten BC, BC′, und das für jeden Winkel der Ordinaten mit der Axe. Hieraus ist klar, daſs Tangenten finden, nichts anders heisse, als die mit den Differenzen der Abscissen, die man gleich sezen kann, zusammengehörige Differenzen der Ordinaten finden. Nennt man daher $\overline{dy}$ die Differenz zweyer nächsten (Ordinaten) y (nämlich BC und B′C′) und dx die Differenz zweyer nächsten (Abscissen) x, (nämlich AB und AB′) (*) so ist $\overline{dy^2} = 2y\overline{dy}$, $\overline{dy^3} = 3y^2\overline{dy}$ u. s. w.

Denn es seyen zwey nächste Ordinaten, (d. h. solche, deren Differenz unendlich klein ist) BC = y, und B′C′ = y + $\overline{dy}$. Weil man nun sezt, $\overline{dy^2}$ sey die Differenz der Quadrate dieser Linien, so hat man die Gleichung

$$\overline{dy^2} = y^2 + 2y\overline{dy} + \overline{dy}^2 - y^2$$

oder, nach Weglassung der Glieder $y^2 - y^2$, die sich aufheben, und nach Wegwerfung des Quadrats der unendlich kleinen Gröſse ($\overline{dy}^2$) (aus Gründen, die man aus der Methode der gröſsten und kleinsten Werthe kennt) $\overline{dy^2} = 2y\overline{dy}$, und ebenso verhält es sich mit den übrigen Potenzen.

(*) Ich habe mir hier die Freyheit genommen, die Leibnizischen Bezeichnungen mit den nachher allgemein eingeführten zu vertauschen.

Hieraus kann man auch die Differenzen von Produkten mehrerer unbestimmten Gröſsen durcheinander finden. So ist z. B. $\bar{d}.(yx) = y\bar{d}x + x\bar{d}y$, und $\bar{d}.(y^2x) = 2xy\bar{d}y + y^2\bar{d}x$.

Wenn man daher eine Gleichung hat, wie $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 + \text{etc.} = 0$, so kann man daraus sogleich die Tangente der Curve finden, welcher diese Gleichung zugehört.

Denn sezt man $AB = x$, $AB' = x + \bar{d}x$, ferner $BC = y$, und $B'C' = y + \bar{d}y$, und substituirt man diese Werthe in der vorigen Gleichung für x und y, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \\ \hline b\bar{d}y + c\bar{d}x + dy\bar{d}x + 2ey\bar{d}y + 2fx\bar{d}x + 2gxy\bar{d}y + 2hxy\bar{d}x \text{ etc.} \\ \quad + dx\bar{d}y \qquad\qquad + gy^2\bar{d}x + hx^2\bar{d}y \text{ etc.} \\ \hline + d\bar{d}x\bar{d}y + e\bar{d}y^2 + f\bar{d}x^2 + g\bar{d}y^2x + h\bar{d}x^2y \\ \qquad\qquad + 2gy\bar{d}y\bar{d}x + 2hx\bar{d}x\bar{d}y \text{ etc.} \\ \qquad\qquad + y\bar{d}x\bar{d}y^2 + h\bar{d}y\bar{d}x^2 \end{array}\right\} = 0.$$

d ist eine gemeine Gröſse,
$\bar{d}$ das Zeichen der Differenz.

Wirft man nun hier die über der ersten Linie befindlichen Glieder weg, weil sie nach der vorigen Gleichung = o sind, und die unter der zweyten Linie befindlichen, weil sie Producte zweyer unendlich kleinen Gröſsen enthalten, so bleiben nur die zwischen beyden Linien befindlichen Glieder übrig, welche die Gleichung geben

$$\left.\begin{array}{l} b\bar{d}y + c\bar{d}x + dy\bar{d}x + 2ey\bar{d}y + 2fx\bar{d}x + 2gxy\bar{d}y + 2hxy\bar{d}x \\ \quad + dx\bar{d}y \qquad\qquad + gy^2\bar{d}x + hx^2\bar{d}y \end{array}\right\} = 0,$$

und, wenn man diese Gleichung in ein Verhältniſs verwandelt

$$\frac{\bar{d}x}{\bar{d}y} = -\frac{b + dx + 2ey + gxy + hx^2 \text{ etc.}}{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ etc.}},$$

d. i. weil $\frac{dx}{dy} = \frac{DC}{DC'} = \frac{TB}{BC}$,

$$\frac{TB}{BC} = \frac{b + dx + 2ey \text{ etc.}}{c + dy + 2fx \text{ etc.}}$$

§. 9. Schon bey einer blos flüchtigen Vergleichung dieser *Leibnizischen* Tangentenmethode mit der *Barrowischen* springt es so sehr in die Augen, daſs die erste von der lezten sich durch nichts, als durch die Charakteristik unterscheide, daſs man sich nicht darüber wundern kann, daſs dies *Leibnizen* gleich damals von allen, die *Barrow's* Methode kannten, vorgehalten; und die Meinung, die *Barrowische* Tangentenmethode sey die Quelle der *Leibnizischen* Differentialrechnung, nach und nach ziemlich allgemein wurde. *) In der That erstreckte sich auch die *Leibnizische* Differentialrechnung im Anfange nicht weiter. Denn auch noch im Jahr 1684. da *Leibniz* die ersten Gründe derselben in den Actis Eruditorum öffentlich bekannt machte, konnte er keine andere Anwendungen davon zeigen, als auf Aufgaben über die Tangenten und über die grösten und kleinsten Werthe, dergleichen *Fermat* und *Gregory* lange vor ihm aufgelöset hatten, und er gieng blos darin weiter, als sie, daſs er zeigte, wie man dergleichen Aufgaben behandeln könnte, ohne die irrationalen Gröſsen wegzuschaffen; aber andere Aufgaben der höheren Geometrie berührte er noch nicht, ungeachtet er versicherte, daſs seine Methode sich auf solche erstrecke. **)

(*) M. s. *Leibn.* Opp. T. III. p. 469. u. vgl. *Wolfii* Comment. de studio Analys. math. §. 227. Elem. Mathes. Tom. V. *Krafftii* Dissert. de Infinito Mathematico ejusque natura Tubing. 1752. §. XXI. *Clemens* erste Gründe aller mathem. Wissenschafften. Stuttg. 1777. §. 207.

(**) Opp. T. III. p. 481. vgl. 454.

Daher ist es auch kein Wunder, daſs es gleich damals Aufſehen machte und Widerspruch fand, wenn Leibniz die Differentialrechnung *seine Methode* nannte; (*) Denn dies war eine Anmassung, die eine Rüge verdiente. Das Unrecht aber, das er durch diese Anmassung begieng, war um nichts gröſser, als das, was die Engländer begiengen, wenn sie ihm das Recht, die Differentialrechnung *seinen Calcul* zu nennen, streitig machen wollten.

Und eben in diesem Unterschiede zwischen *Methode* und *Calcul* liegen die Gründe zur einzig richtigen Entscheidung des berühmten Streits über die Frage: Wer der wahre Erfinder der Infinitesimalrechnung sey. Denn versteht man unter der Infinitesimalrechnung den Inbegriff der Methoden, wodurch auch die transscendenten Gröſsen, die *Des Cartes* von der Geometrie ausgeschlossen hatte, der analytischen Behandlung unterworfen werden, worunter die Methode der unendlichen Reihen und die der Gränzen oder der ersten und lezten Verhältnisse, analytisch betrachtet, die wichtigsten sind, so kann *Leibniz* keine Ansprüche auf die Ehre einer Erfindung machen, die so ausschlieslich *Newtons* Eigenthum ist, daſs keiner seiner Zeitgenossen nur durch eine entfernte Veranlassung, nur durch die Erweckung einer fruchtbaren Idee oder auf andere Art einigen Antheil daran gehabt zu haben, vorgeben konnte. Hier kann *Newton* in einem Sinne und Umfange, wie kein Sterblicher vor ihm, sagen: *Habito meo fundamento* (**) (ich wohne auf eigenem Grunde und Boden,); Denn,

(*) M. s. die Aeusserungen von *Wallis* und *Fatio de Duillier*, über diesen Punkt. Opp. T. III. p. 486. 488.

(**) Opp. T. III. p. 61.

kaum 25 Jahre alt, *), und ausser den Werken der alten Griechen, blos mit *Des Cartes's* Geometrie und *Wallisens* Arithmetik des Unendlichen, bekannt, war er im Besize dieser Erfindung, und theilte sie schon im Jahr 1669 seinem Lehrer *Barrow* mit, der gleich darauf einen theologischen Lehrstuhl zu Cambridge suchte, um den mathematischen einem solchen Schüler überlassen zu können. Auch ist, ausser *Leibnizen*, nie ein Sterblicher aufgetreten, der die Dreistigkeit gehabt hätte zu sagen, daſs *Newton* von ihm, oder nachzuweisen, daſs er von einem andern etwas gelernt habe. Auch nicht einmal auf die Ehre des zweiten Erfinders, die man ihm doch, wenigstens in Teutschland, ziemlich allgemein zugestanden hat, kann *Leibniz* gegründete Ansprüche machen, wenn blos von der Methode oder den Methoden, die der Infinitesimalrechnung eigenthümlich sind, die Frage ist. Denn es läſst sich nachweisen — und *Newton* hat dies in seinem an den Abt *Conti* gerichteten Vertheidigungsschreiben **) mit einer Gründlichkeit und Genauigkeit gethan, die nichts zu wünschen übrig läſst — daſs er alle dahin gehörigen Methoden von einiger Erheblichkeit, theils unmittelbar bey seiner zweymaligen Anwesenheit in London in den Jahren 1673 und 1676, theils mittelbar in Briefen von *Collins*, *Oldenburg* und *Newton*, so weit, daſs wenigstens für ihn keine weitere Belehrung darüber nöthig war, mitgetheilt

---

(*) Er war im Jahr 1642 gebohren.

(**) Opp. T. III. p. 451. ff. 474 ff. besonders auch p. 479 und 487, wo *Newton* gezeigt hat, daſs das berühmte Scholion bey dem Lemma II. L. II. Princ. Phil. Nat. Math. ganz anders zu verstehen sey, als es von *Leibnizen* und seinen Vertheidigern erklärt worden ist.

erhalten habe, und daſs er auch in der Folge bey Anwendungen seines Calculs auf jene Methoden, *Newtons* Fuſsstapfen, wie solche in seinen nach und nach erschienenen Werken deutlich zu erkennen waren, Schritt für Schritt gefolgt sey *); was auch durch mehrere unzweydeutige Bekenntnisse von ihm selbst, sogar noch von den Jahren 1693 und 1700, um der früheren nicht zu gedenken, ausser Zweifel gesezt ist **)

§. 10. So entschieden aber dieses ist, eben so unläugbar ist es auf der andern Seite, daſs, wenn die Frage so gestellt wird, wie z. B. *Wolf* ***) sie gestellt hat, daſs man unter der Infinitesimalrechnung die bestimmte Art des Algorithmus oder Calculs für die unendlich kleinen Gröſsen versteht, welche die auf die Vorstellung von den Differenzen der endlichen Gröſsen gegründete Charakteristik voraussezt, niemand als *Leibniz*, auf die Ehre der Erfindung Ansprüche machen könne.

Und zu dieser Erfindung wurde *Leibniz* durch das Benehmen der Engländer gegen ihn, gleichsam genöthiget. Denn sie machten es ihm nicht gar zu leicht von ihnen zu lernen. Einmal muſste er um alles, was er zu wissen begehrte, bestimmt und ausdrücklich bitten. Dies war nun in der Ordnung. Aber sie pflegten so mit Maasse zu geben, daſs er sich bisweilen zum zweyten und drittenmale weitere Erläuterungen über das Erhaltene ausbitten muſste. Ferner, wenn sie ihm ihre Methoden mittheilten, so behielten sie doch

---

(*) Opp. T. III. p. 484.

(**) M. s. besonders Opp. T. III. p. 365. vgl. 481. ferner p. 484. 445.

(***) Comment. de stud. An. Math. §. 228. El. Math. T. V. p. 377.

gerne die Gründe derselben zurück. Damit war ihm nun nicht gedient, einmal, weil er ihre Entdeckungen gerade als Producte der Erfindungskunst, und wiefern sie als solche zur weiteren Vervollkommnung dieser Kunst beytragen konnten, am meisten schäzte; und dann, weil er kein Vergnügen daran finden konnte, diese Entdeckungen zwar als schäzbare, aber nicht producible Geschenke bey sich zu verschliessen, sondern, in so hohem Grade, wie er war, communicativ, auf die weitere Verbreitung derselben bedacht seyn muſste. In beyden Rücksichten aber war ihm die Kenntniſs ihrer Gründe unentbehrlich. Da nun er selbst und andere lange vergeblich versucht hatten *Newton* zur öffentlichen Bekanntmachung seiner Methoden im Zusammenhange mit ihren Gründen zu vermögen, so blieb ihm nichts anders übrig, als diesen Gründen selbst nachzuspüren.

Dabey führte ihn nun das *Barrowische* Dreyeck, dessen Seiten die Elemente der Coordinaten und der Curve sind, und durch dessen Hülfe *Barrow* zuerst die Tangenten vermittelst der Differenzen der Coordinaten bestimmt hatte, auf den glücklichen Gedanken, diese Differenzen arithmetisch zu betrachten, sie durch eine eigene Charakteristik zu bezeichnen und einen eigenen Algorithmus für sie einzuführen, bey dessen Ausführung ihm in der Folge die arithmetischen Beschäftigungen seiner frühern Jugend sehr zu Statten kamen. *) Der erste Versuch, den er damit machte, war die Darstellung der Barrowischen Tangentenmethode, vermittelst dieses Calculs, die *Newton* sehr treffend eine Verkleidung unter einer

(*) Opp. T. III. p. 468.

neuen Bezeichnung (un deguisement sous une notation nouvelle) *) nannte. Sobald dieser ihm gelungen war, stand ihm der Weg zu den meisten Aufgaben über die Curven offen, da die Tangenten in der Theorie derselben eine so wichtige Rolle spielen. So erzält *Leibniz*, dem Wesentlichen nach, die Sache selbst in den Actis Eruditorum von 1686 **), wo er sagt: „Der algebraische Calcul wollte mich dabey nicht befriedigen, da er mich in der Nothwendigkeit lieſs, vieles, was ich durch die Analyse herausbringen wollte, durch weitläufige Constructionen zu erhalten, bis ich endlich die wahre Ergänzung der Algebra für die transcendenten Gröſsen erfand, nämlich meinen Calcul der *unbestimmt kleinen* ***) Gröſsen (*indefinite parvorum*) den ich auch Analysis des Untheilbaren oder Unendlichen nenne, nach dessen Entdeckung alles, was ich von Dingen dieser Art vorher selbst bewundert hatte, mir nun ein bloſses Spiel zu seyn schien." Und in seinem Briefe an den Abt *Conti*: ****) „Ich bin durch Betrachtung der Differenzen der Zahlen zu meinem Calcul gelangt, indem ich bemerkte, daſs diese Differenzen auf stetig wachsende Gröſsen angewandt, in Vergleichung mit den verschiedenen Gröſsen, verschwinden, an Statt daſs sie bey den Zahlreihen beständig bleiben."

Nun konnte er also von *Barrows* Tangentenmethode Rechenschaft geben.

(*) Opp. T. III. p. 483.

(**) L. c. p. 193.

(***) Man bemerke auch in diesem Ausdrucke die Uebereinstimmung mit *Barrow*.

(****) Opp. T. III. p. 468.

Ungeachtet es aber keinem Zweifel unterworfen iſt, daſs er *Barrows* Werk gekannt und benuzt habe, so gesteht er doch nicht, daſs er das *Barrowische* Dreyeck, von dem er sonst viel Rühmens macht, *) und dem er wegen seiner groſsen Nuzbarkeit in der Theorie der Curven den Namen des *charakteristischen* **) giebt, durch *Barrow* kennen gelernt habe, sondern er will selbst darauf gekommen seyn, ***) und giebt eine ziemlich weit hergeholte Veranlassung dazu vor. ****) Dem sey übrigens wie ihm wolle, so hat doch niemand den Antheil, den *Leibniz* an der Erfindung der Infinitesimalrechnung gehabt hat, genauer und richtiger angegeben, als er selbst in einem Briefe an *Wallis*, wo er sich auch über die Art, wie er dazu gekommen, noch einmal, mit den bereits angeführten Stellen ganz übereinstimmend, erklärt, wenn er sagt: *****) „Die erste Aufklärung über die Sache hat mir die Betrachtung der Differenzen und Summen bey den Zahreihen gegeben, da ich bemerkte, daſs die Differenzen für die Tangenten

---

(*) Opp. T. III. p. 291.

(**) L. c. p. 85.

(***) L. c. p. 469.

(****) L. c. p. 193.

(*****) L. c. p. 105. Man vergleiche damit l. c. p. 261. wo er sagt: „Die neue Analyse des Unendlichen zeigt einen neuen Algorithmus für die Gröſsen die in Vergleichung mit andern unendlich groſs oder klein sind. In den unendlichen Gleichungen führt sie die unbekannten Gröſsen auch in die Exponenten der Potenzen, oder als Potenzen und Wurzeln ein, und bedient sich einer neuen Eigenschaft der veränderlichen Gröſsen, nemlich der *Veränderung selbst*, die durch gewisse Charactere bezeichnet wird.“

und die Summen für die Quadraturen gehören. Bald darauf fand ich, daſs die zweyten Differenzen in der Geometrie durch die Krümmungen ausgedrückt werden, und bemerkte die bewundernswürdige Analogie der Relation zwischen den Differenzen und Summen mit der Relation zwischen den Potenzen und Wurzeln. Ich schloſs also, ausser den bisher angenommenen Formen (affectiones) der Gröſse, y, y^2 . . . $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$ etc. oder im Allgemeinen y^e könnte man auch noch die neuen Formen der Differenzen oder Fluxionen $d^e y$, dy . . . und im Allgemeinen $d^e y$ annehmen. Sobald diese Form angenommen war, sahe ich, daſs sich auch die Gröſsen, welche *Des Cartes* von seiner Geometrie und Analysis ausgeschlossen hatte, bequem durch Gleichungen ausdrücken lieſsen, und daſs auf solche Art auch die Curven, die er fälschlich *mechanische* nennt, dem Calcul eben so gut, wie die von ihm in die Geometrie aufgenommenen, unterworfen werden könnten. Und wie schon die Alten die Localgleichungen der Curven beobachtet hatten, aber *Des Cartes* uns dadurch doch einen nüzlichen Dienst geleistet hat, daſs er sie durch seinen Calcul ausdrückte, so dachte ich, würde auch ich etwas nüzliches unternehmen, wenn ich eine Methode *) bekannt machte, die von ihm ausgeschlossenen Curven gleichfalls durch Gleichungen auszudrücken, vermittelst deren man an dem sicheren Leitfaden des Calculs zu allen ihren Eigenschaften gelangen könnte. Und ob ich gleich gestehen muſs, daſs, so wie in Absicht auf die leichteren Localgleichungen der Curven, die Alten *die Sache*

(*) Daſs darunter blos der Calcul zu verstehen sey, iſt aus dem Gleichfolgenden klar.

selbst, die durch *Des Cartes's* Calcul ausgedrückt wird, schon gekannt haben, eben so auch in Absicht auf die leichteren meiner Differentialgleichungen *die Sache selbst*, die dadurch ausgedrückt wird, Ihnen und andern groſsen Männern unmöglich habe unbekannt seyn können; so glaube ich doch, daſs sowohl *Des Cartes*, als ich, etwas nüzliches geleistet habe. Denn *so lange dergleichen Dinge noch nicht auf beständige Charaktere des analytischen Calculs zurückgebracht sind, und dabey alles blos durch den Verstand und die Einbildungskraft ausgerichtet werden muſs, kann man in ihre zusammengesezteren und versteckteren Seiten nicht eindringen, was sich doch in ein blosses Spiel verwandelt, so bald der Calcul einmal vestgesezt ist.*"

Hier spricht *Leibniz* ganz aus eigener Erfahrung. Er hatte es empfunden wie viel Arbeit ihm *Newtons* Methoden kosteten, und doch war es ihm nicht gelungen, sie so weit in seine Gewalt zu bekommen, daſs er gegen fehlerhafte Anwendungen derselben gesichert gewesen wäre. Um sie sich so weit anzueignen, daſs er nicht nur für sich selbst sicheren Gebrauch davon machen, sondern sie auch andern auf gleiche Art mittheilen konnte, gab es kein anderes Mittel, als, sie auf einen Calcul zu bringen, gegen dessen Resultate, wenn man einmal seine Gründe eingeräumt hatte, keine weitere Einwendung Statt fand. Darein also haben wir *Leibnizens* Verdienst zu sezen, daſs er für *Newtons* Methoden einen eigenen, und einen so bequemen Algorithmus erfand. *) Damit wird

*) Die Leibnizische Betrachtung der Differenzen hat Aussichten eröfnet, die sich von einem andern Standpunkte aus nicht auf gleiche Art würden gezeigt haben. Opp. T. III. p. 487.

übrigens keinesweges behauptet, daſs *Newton* für seine Methoden nicht auch einen eigenen Calcul erfunden und gebraucht habe. Er hatte sich vielmehr eines solchen schon im Jahr 1666, *) aber blos zu seinem Privatgebrauche, bedient, und alle seine Papiere die in *Leibnizens* Hände gekommen waren, so wie auch seine gedruckte Werke enthielten keine Spur davon, sondern die erste Probe desselben wurde im zweyten und dritten Bande von *Wallisens* Werken, **) wovon der lezte im Jahr 1699 herauskam, also lange nach der Bekanntmachung des *Leibnizischen*, mitgetheilt. Hätte man also bey dem Streite um das Recht auf die Erfindung der Infinitesimalrechnung nur die Methode von dem Algorithmus unterschieden, so würde er bald entschieden worden; oder vielmehr er würde nie entstanden seyn. In der That wehrt sich auch in dem ganzen Streite *Newton* immer nur für seine Methoden, ***) und *Leibniz* für seinen Calcul. ****)

Ueber die weitere Geschichte dieses unrühmlichen Streits lassen wir desto eher den Vorhang fallen, da sie, ohne weiteren Gewinn für die Wissenschaft, auf beyden Seiten nur Schritte zeigt, die, als Flecken menschlicher Schwäche, blos dazu dienen könnten, den reinen Eindruck der Gröſse zu verderben, den der Anblick dieser Heroën den staunenden Enkeln sonst gewähren muſs. *Leibnizen* bleibt immer das groſse Verdienst ungeschmälert, die Masse der Gemeingüter des menschlichen Verstandes mit diesem erhabensten seiner Erzeugnisse

---

(*) Opp. T. III. p. 481.

(**) L. c, p. 363. vgl. p. 459.

(***). L. c. p. 477. 478. 479.

(****) L. c. p. 445. 487. 501.

vermehrt zu haben, dadurch, daſs er ihm allgemeine Mittheilbarkeit verschaffte, so, daſs es nun auch selbst von solchen gebraucht und genuzt werden kann, die blos nach Regeln verfahren müssen, ohne deren Gründe zu verstehen, *) an Statt daſs es vorhin das Privateigenthum eines Einzigen gewesen wäre, der, wie die Gottheit, in einem unzugänglichen Lichte wohnend, und selbstgenügsam wie sie, nichts gab, weil er nichts erhielt, und nichts erhielt, weil ihm niemand etwas geben konnte, das er nicht schon gehabt hätte; der durch seine beharrliche Verschlossenheit sein eigenes Vaterland in die Nothwendigkeit sezte, über die wichtigsten seiner Entdeckungen bey *Leibnizen* Belehrung zu suchen; und der endlich durch viele Jahre lang fortgeseztes Bitten kaum dahin zu vermögen war, seinen neugierigen Zeitgenossen einen Abriſs von dem Plane der Welt, den er in seinem Kopfe trug, vorzulegen.

§. 11. Nach dieser Erzählung wird es nun um so weniger überflüssig scheinen, auch noch eine gedrängte Darstellung von *Newtons* Methode und seinem Calcul folgen zu lassen, je seltener man in den mathematischen Lehrbüchern befriedigende Nachrichten davon findet.

Newton geht davon aus, daſs er die *stetigen Gröſsen aus stetiger Bewegung* entstehen läſst, und diese Vorstellungsart giebt dem ganzen Gange seiner Untersuchungen eine eigene Richtung.

Er stellt sich nämlich vor, jede krumme Linie werde durch zwey Bewegungen beschrieben, deren eine die der Ordinate ist, welche, sich selbst parallel, längst der Abscisse fortrückt, die

---

(*) Opp. T. III. p. 127.

andere aber die Bewegung eines Punkts, der die Ordinate durchläuft; indem er sich von der Axe oder von dem Endpunkte dieser Ordinate entfernt. Die erste dieser Bewegungen wird, zur Erleichterung der Untersuchung, für gleichförmig, die zweyte aber für veränderlich angenommen, weil sonst die Curve sich in eine gerade Linie verwandeln würde.

Ist sie beschleunigt, so wird diese Curve gegen ihre Axe erhaben, ist sie aber vermindert, so findet das Gegentheil Statt. Für jeden Punkt aber, zu dem der bewegliche Körper C (Fig. 13.) gelangt ist, wird die Geschwindigkeit, womit er längst BC fortflieſst, oder sich bewegt, und welche *Newton* die *Fluxion* der Ordinate nennt, nicht durch den Raum Ec ausgedrückt, den er durchlief, während die Ordinate Bb durchlief, sondern durch den Raum Ee, den er mit der im Punkte C erlangten Geschwindigkeit durchlauffen würde, wenn solche ohne Zuwachs oder Abnahme erhalten würde. Denn dieser beschreibende Punkt kommt nach c blos vermöge der Beschleunigung oder Verminderung, die er während der Zeit erfährt, welche die Ordinate braucht, um Bb zu durchlauffen, weil, wenn er nicht beschleuniget oder aufgehalten worden wäre, der Raum, den er würde durchloſſen haben, die Linie Ee gewesen seyn würde, die zwischen der Parallele CE und der Tangente in dem Punkte C eingeschlossen ist.

Vermittelst dieser Grundsäze läſst sich die Fluxion einer krummlinichten Fläche eben so leicht bestimmen. Diese ist nicht der Raum CBbc, um welche diese Fläche in der That wächst, sondern das Rechteck BE, das von der Ordinate mit der Fluxion der Abscisse eingeschlossen wird. Denn

z. B. bey einem Dreyecke, wo die Abſciſse gleichförmig flieſst, wächst oder flieſst die Fläche mit beſchleunigter Bewegung, weil die Zunahmen in gleichen Zeiten immer gröſser und gröſser werden. Nun ist offenbar, daſs das kleine Dreyeck CEe vermöge dieser Beſchleunigung beschrieben wird; Man muſs also dieses wegwerfen, und die wahre Geschwindigkeit der wachsenden Fläche ABc, wenn sie zu dieser Gröſse gelangt ist, ist das Rechteck CBbc.

Was von dem Dreyecke gesagt worden ist, läſst sich leicht auf krumme Linien anwenden; Demnach ist die Fluxion einer jeden Fläche das Product der Ordinate in die Fluxion der Abciſse. Die Fluxion eines Körpers ist das Produkt aus der Fluxion der Abſciſse in die beschreibende Fläche; welche z. B. der mit dem Halbmesser BC beschriebene Kreis seyn wird, wenn der Körper ein durch Umdrehung der Figur ABC um AB erzeugter Kegel oder Konoid ist.

Diese Art, die Zunahme der Figuren zu betrachten, führt nun auch zu Fluxionen von Fluxionen, und überhaupt zu Fluxionen höherer Ordnungen. Denn wenn man sich über der nämlichen Axe AB (Fig. 14) eine Curve DdD vorstellt, deren jede Ordinate sich wie die Fluxion von BC, oder wie die Geschwindigkeit, welche der beschreibende Punct C auf BC hat, verhält, so treten zweyerley Fälle ein, je nachdem diese Geschwindigkeit gleichförmig oder ungleichförmig ist. Ist sie gleichförmig, so wird die Linie DdD der Axe parallel, BD hat folglich keine Fluxion, und es giebt also auch keine zweyte für die Ordinate BC. Ist sie aber ungleichförmig, beschleunigt oder vermindert, so wird die Ordinate BC wachsen oder abnehmen, und mithin wird diese Ordinate eine Fluxion haben, welche offenbar die

zweyte von der Ordinate BC oder eine Fluxion von ihrer Fluxion seyn wird. Aus diesem Beyspiele kann man zugleich abnehmen, was die Fluxionen der übrigen höheren Ordnungen seyen. Denn wenn DdD nicht eine gerade gegen die Axe geneigte Linie ist, so wird die Ordinate BD selbst eine zweyte Fluxion haben, welche folglich die dritte der Ordinate BC seyn wird. Ebenso lassen sich auch die Fluxionen der übrigen höheren Ordnungen darstellen.

§. 12. Für diese Fluxionen bediente sich nun *Newton* folgender Charakteristik. Die Fluxion einer einfachen Gröſse bezeichnete er mit einem über die Gröſse gesetzten Punkte, z. B. die Fluxion von x mit $\dot{x}$. Wenn man also eine einfache veränderliche Gröſse hat, wie x, so ist es leicht, ihre Fluxion anzugeben, und umgekehrt, wenn man eine solche Fluxion hat, wie $\dot{x}$, so sieht man sogleich, daſs die Gröſse, deren Fluxion sie ist, x sey. Ebenso ist die Fluxion von mx, wo m eine beständige Gröſse bedeutet, $m\dot{x}$.

Um die Fluxion eines Products zweyer veränderlichen Gröſsen, wie xy zu finden, stelle man sich ein Rechteck AC (F. 15.) vor, dessen Seiten x und y seyen. So wie nun gezeigt worden ist, daſs die Fluxion der Fläche eines Dreyecks, wie ABC, blos BE, nicht die ganze Fläche BCcb sey, ebenso ist es auch leicht, zu beweisen, daſs die Fluxion des Rechtecks AC die Summe der Fluxionen von BE und DF, d. h. $y\dot{x} + x\dot{y}$ sey; und umgekehrt, wenn man eine Fluxion von dieser Form hat, daſs die Gröſse, von welcher sie entstanden ist, xy sey. Daraus aber läſst sich durch die bloſse Analyse und ohne unmittelbare Betrachtung der Gründe der Flu-

xionen das Verhältniſs dieser zu jeden andern Gröſsen, von was für einer Form oder Zusammensezung sie immer seyn mögen, leicht herleiten. *)

Namentlich folgt daraus, daſs $m x^{m-1} \dot{x}$ die Fluxion von x^m, und umgekehrt, daſs die Gröſse, die $x^n \dot{x}$ zu ihrer Fluxion hat, $\frac{1}{n+1} x^{n+1} \dot{x}$ ſey.

Ferner folgt daraus, daſs von $\sqrt{Z}$ die Fluxion sey

$$\frac{\dot{Z}}{n Z^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\dot{Z}}{n \sqrt[n]{Z^{n-1}}}$$

Endlich ist aus eben den Gründen von $\frac{y}{Z}$ die Fluxion $\frac{Z\dot{y} - y\dot{Z}}{Z^2}$.

Alle diese Säze gelten auch von complexen Gröſsen. So ist z. B. von $(a\ x^2)^n$ die Fluxion $2nx\dot{x}\ (a^2 x^2)^{n-1}$.

Der Calcul der Fluxionen der zweyten Ordnung ist diesem ganz ähnlich. Die Fluxion von $\dot{x}$ ist $\ddot{x}$, die von $\dot{y}$ ist $\ddot{y}$; die von $\dot{y}\dot{y}$ ist $2\dot{y}\ddot{y}$, und umgekehrt, die Gröſse, zu welcher $2\dot{y}\ddot{y}$ als Fluxion gehört, ist $\dot{y}\dot{y}$.

(*) In so ferne konnte daher Newton richtig behaupten, Leibnizen seine Methode mitgetheilt zu haben, wenn er schon ihn nirgends etwas von seiner Charakteristik hatte sehen lassen (Opp. T. III. p. 478. f.) Und in so ferne konnte auch Leibniz behaupten, der geometrische Calcul der Differenzen, der mit der Fluxionsrechnung einerley sey, sey blos ein besonderer Fall des analytischen Calculs der Differenzen überhaupt. (Opp. T. III. p. 468.)

§. 13. Von dieſen Gründen macht nun Newton folgende Anwendung zur Beſtimmung der Tangenten.

Vorausgeſezt, daſs die unendlich kleinen Theile der Curve gerade Linien, und die Tangenten ihre Verlängerungen ſeyen, kann man die Entfernung zwiſchen jeden zwey Ordinaten BC, bc (Fig. 13.) ſo groſs, als man will, nehmen, und wenn FCe eine Tangente in dem Punkte C, und CE der Axe parallel iſt, ſo wird CE die Fluxion der Abſciſſe, und Ee die zugehörige Fluxion der Ordinate ſeyn, und es verhält ſich alſo die Fluxion der Ordinate zu der der Abſciſſe, wie die Ordinate zur Subtangente, d. h. es iſt

$$\dot{y} : \dot{x} = y : \frac{y\dot{x}}{\dot{y}},$$ welches die Gröſse der Subtangente iſt. Sucht man alſo aus der Gleichung für die Curve den Werth von $\dot{y}$, welches immer leicht iſt, ſo erhält man daraus einen Ausdruck, welcher, an die Stelle von $\dot{y}$ geſezt, auch in den Nenner des vorigen Ausdrucks $\dot{x}$ bringt; Dividirt man alsdann Zähler und Nenner durch $\dot{x}$, ſo bleibt für das Verhältniſs der Subtangente zur Abſciſſe ein Ausdruck, der keine Fluxion mehr enthält, und ſich alſo conſtruiren läſst.

§. 14. In der Folge hat *Newton* ſeine Fluxionsmethode noch auf eine andere Vorſtellungsart gegründet, die um deſto merkwürdiger iſt, da man von ihr nothwendig ausgehen muſs, wenn man die Regeln jener Methode für alle Fälle der Anwendung durch ächt geometriſche Beweiſe rechtfertigen will. Er ſtellt ſich nämlich ſeine Fluxionen als die *lezten Verhältniſſe* der gleichzeitigen Veränderungen zweyer

von einander abhängigen Gröſsen vor. Man gedenke sich z. B. eine Curve ACc (Fig. 13.) mit zwey Ordinaten BC, bc in unbestimmter Entfernung, Bb = CE, so stellen die Seiten CE, Ec die zusammengehörigen gleichzeitigen Zunahmen der Abscisse AB und der Ordinate BC vor. Wenn sich nun bc der BC nähert, so nähert sich die Secante Cc immer mehr und mehr der Tangente, indem sie sich um den Punkt C drehet, und das kleine Dreyeck CEc nähert sich immer mehr der Aehnlichkeit mit demjenigen, welches die Tangente CF und die Linien FB, BC einschlieſsen. Folglich ist das Verhältniſs der Seiten FB, BC die *Gränze*, welcher das Verhältniſs der Seiten CE, Ec sich beständig nähert, und welche es im Augenblicke, da sie verschwinden, erreicht. Um nun dieses Verhältniſs zu finden, seze man die Abscisse sey = x, die Ordinate werde durch eine Function von x, wie x^n ausgedrückt, und die Zunahme von x bezeichne man mit $\dot{x}$, so wird, wenn sich x in $x + \dot{x}$ verwandelt, $x^n =$

$$(x+\dot{x})^n = x^n + nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2 + \text{etc.}$$

Die zusammengehörigen Zunahmen werden sich also verhalten wie

$$\dot{x} \text{ zu } x^n + nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2 + \text{etc. oder}$$

$$\text{wie } 1 \text{ zu } x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x} + \text{etc.}$$

Folglich wird in dem Augenblicke, da $\dot{x} = 0$ wird, dieses Verhältniſs $= 1 : nx^{n-1}$ oder $\dot{x} : nx^{n-1}\dot{x}$

Demnach ist die Fluxion oder die verschwindende Zunahme von $x^2 = 2x\dot{x}$, die von $x^3 = 3x^2\dot{x}$, u. s. w. wie oben.

Da das Verhältniſs der Seiten FB, BC des Dreyecks FBC nach den verschiedenen Punkten der Curve ACc sich ändert, so ändert sich auch das lezte Verhältniſs der Zunahmen der Abscisse und Ordinate, das mit ihm einerley ist. Man kann also dieses Verhältniſs durch die Ordinate einer Curve ausdrücken, welche selbst einer Zunahme oder Abnahme fähig ist, alsdann sind die Fluxionen dieser Ordinaten zweyte Fluxionen, oder Fluxionen der zweyten Ordnung.

§. 15. Vergleicht man diese Darstellung von *Newtons* Fluxionsrechnung — wobey ich mich hauptsächlich an Montucla *) gehalten habe, weil *Newton* selbst nirgends das Ganze derselben, und nirgends etwas davon mit solcher Klarheit gegeben hat — mit *Leibnizens* Differentialrechnung, so wird man bald bemerken, daſs beyde nur in Ansehung der Vorstellungsart von der Entstehung der ausgedehnten Gröſsen, und der Bezeichnung der unendlich kleinen Gröſsen sich unterscheiden. Denn sezt man für $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, etc. dx, dy, d^2x etc. so kommt man auf einerley Regeln, einerley Calcul, einerley Resultate. Indessen blieb, durch *Newtons* eigene Schuld, seine Charakteristik auf die brittischen Inseln eingeschränkt, während die *Leibnizische* von den Gelehrten aller europäischen Länder angenommen wurde.

§. 16. Um nun beurtheilen zu können, wie ferne *Carnot*, da er den Weg zeigen wollte, auf welchem die Erfinder der Infinitesimalrechnung zu ihrer Erfindung haben kommen können, denjenigen getroffen habe, auf welchem sie wirklich dazu

---

(*) Histoire des Mathematiques P. IV. L. VI. p. 326. ff.

gekommen sind, vergleiche man den von ihm vorgezeichneten Weg, Schritt für Schritt mit *Barrow's* Tangentenmethode.

Um diese Vergleichung noch mehr zu erleichtern, und die Uebereinstimmung beyder Methoden noch einleuchtender zu zeigen, wollen wir *Barrow's* Beyspiel nach *Carnot's* Methode behandeln.

Es sey also (F. 11.) $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$ so ist $AZ = x - NR$, $ZN = y - MR$.

Nun hat man für den Punkt M der Curve die Gleichung $x^2 + y^2 = \left(\frac{ay}{x}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$, woraus folgt

$$x^4 + x^2y^2 = a^2y^2;$$

für den Punct N aber

$$(x-NR)^2 + (y-MR)^2 = \left(\frac{a(y-MR)}{x-NR}\right)^2 = \frac{[a(y-MR)]^2}{(x-NR)^2},$$

oder

$$(x-NR)^4 + (y-MR)^2(x-NR)^2 = [a(y-MR)]^2,$$

welches, nach gehöriger Entwickelung giebt

$$\left\{\begin{array}{l} x^4 - 4x^3 NR + 6x^2\overline{NR}^2 - 4x\overline{NR}^3 + \overline{NR}^4 \\ + x^2y^2 - 2x^2y MR - 2xy^2 NR + x^2\overline{MR}^2 + 4xy MR NR \end{array}\right.$$
$$+ y^2\overline{NR}^2 - 2x NR\overline{MR}^2 - 2y MR\overline{NR}^2 + \overline{MR}^2\overline{NR}^2$$
$$= a^2y^2 - 2a^2y MR + a^2\overline{MR}^2.$$

Wird von dieser Gleichung die erste $x^4 + x^2y^2 = a^2y^2$ abgezogen, so bleibt übrig

$$\left\{\begin{array}{l} -4x^3 NR + 6x^2\overline{NR}^2 - 4x\overline{NR}^3 + \overline{NR}^4 \\ -2x^2y MR - 2xy^2 NR + x^2\overline{MR}^2 + 4xy MR NR \end{array}\right.$$
$$+ y^2\overline{NR}^2 - 2x NR\overline{MR}^2 - 2y MR\overline{NR}^2 + \overline{MR}^2\overline{NR}^2$$
$$= -2a^2y MR + a^2\overline{MR}^2$$

In dieſer Gleichung ſind MR, NR bloſse Hülfsgröſsen, die man alſo ſo klein, wie man will, folglich auch ſo klein ſezen kann, daſs die Produkte der einen in die andere und die höheren Potenzen einer jeden gegen die Factoren oder die Wurzelgröſsen verſchwinden. Iſt aber dies, ſo können aus der vorigen Gleichung alle Glieder, welche dergleichen Producte oder höhere Potenzen von MR und NR enthalten, weggeworfen werden, ohne daſs deſswegen zwiſchen den auf beyden Seiten übrigbleibenden Gliedern eine wahre Gleichung Statt zu finden aufhörte. Nimmt man nun dieſe Veränderung mit der vorigen Gleichung wirklich vor, ſo erhält man daraus

$$-4x^3NR - 2x^2yMR - 2xy^2NR = -2a^2yMR,$$

oder $4x^3NR + 2x^2yMR + 2xy^2NR = 2a^2yMR$, und hieraus, nach gehöriger Reduction,

$$\frac{NR}{MR} = \frac{a^2y - x^2y}{2x^3 + xy^2}.$$

Soll dieſes Reſultat genau werden, ſo müſſen die Hülfsgröſsen MR, NR daraus weggeſchafft werden. Nun iſt, nach der Figur

$$NR : MR = TP : \begin{cases} MP \\ y \end{cases}, \text{ woraus folgt}$$

$\frac{NR}{MR} = \frac{TP}{y}$; folglich iſt auch $\frac{TP}{y} = \frac{a^2y - x^2y}{2x^3 + xy^2}$, u. mithin $TP = \frac{a^2y^2 - x^2y^2}{2x^3 + xy^2}$.

Vergleicht man den ganzen Gang dieſer Auflöſung mit dem der *Barrowiſchen*, ſo wird man faſt in Verſuchung geführt, zu glauben, *Carnot* habe *Barrow's* Werk vor ſich liegen gehabt, und blos über deſſen Methode einen Commentar ge-

schrieben, um das mit Deutlichkeit zu entwickeln, was der Erfinder vielleicht nur dunkel geahndet hatte.

§. 17. Ausser der merkwürdigen Bestättigung welche die genaue Uebereinstimmung mit *Barrow's* Methode für die Richtigkeit von *Carnot's* Darstellung der Gründe der Differentialrechnung abgiebt, erhält sie noch eine andere nicht minder bedeutende durch ihre eben so genaue Uebereinstimmung mit den Urtheilen von zwey der ersten Analysten unserer Zeit über den nämlichen Gegenstand; nicht, weil diese Urtheile hier als Zeugnisse ein Moment haben können, sondern, weil jeder dieser Gelehrten, von dem andern unabhängig, seine Meynung mit Gründen unterstüzt hat, die an sich richtig sind, und mit denen, welche *Carnot* für seine Behauptung beygebracht hat, auf Eins hinaus laufen.

Der eine ist Hr. *L'Huilier* welcher sich §. LXVI. seiner Preisschrift *) folgendermassen darüber erklärt:

„Bey der Differentialrechnung, wie sie von Fontenellen und andern vorgetragen worden ist, (und in den gewöhnlichen Lehrbüchern noch vorgetragen wird,) betrachtet man die Differentiale, und folglich auch alle Functionen derselben, als wirkliche Grössen, und ins besondere sind die Potenzen dieser Differentiale eben so gut Gröſsen, als die Differentiale selbst, und man kann diese Potenzen in den Ausdrücken dieser Functionen, wo

(*) Exposition élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs à Berlin 1786.

wo sie mit dem Additions- oder Subtractionszeichen vorkommen, nicht weglassen, ohne einen Fehler zu begehen, oder wenigstens den Verdacht davon zu erwecken. Indessen läſst man, bey der Vergleichung zwischen dem Differential einer Gröſse mit dem Differential ihrer Function, nachdem man die beyden Glieder des Verhältnisses, das man zwischen denselben vestsezt, durch das erste Differential dividirt hat, die Potenzen dieses Differentials weg, d. h. (nach der Sprache der genauen Wissenschaften) man vernichtet diese Potenzen, und folglich auch, das Differential der veränderlichen Gröſse selbst, nachdem man es anfänglich als eine wirkliche Gröſse oder Veränderung betrachtet hatte. Und gleichwohl fährt man, auch nach dieser Vernichtung, noch fort, von Differentialen oder Veränderungen zu reden, welche die veränderliche Gröſse und ihre Function erhalten haben, was widersprechend ist.

Allein, wenn man die beyden Glieder des Verhältnisses, welches das der wirklichen und gleichzeitigen Veränderungen einer veränderlichen Gröſse und ihrer Function ausdrückt, durch die wirkliche Veränderung dieser veränderlichen Gröſsen dividirt, so erhält man zum Vordergliede dieses Verhältnisses die Einheit, und zum Hintergliede die Summe des Coefficienten des Differentials der veränderlichen Gröſse, in dem Ausdrucke der wirklichen Veränderung, welche die Function erhalten hat, und der Potenzen dieses Differentials; und folglich läuft die Operation der Vernichtung dieses Differentials, indem man diese Potenzen in diesem Hintergrunde $= 0$ sezt, darauf hinaus, daſs man das Verhältniſs der Einheit zum Coefficienten des Differentials der veränderli-

chen Gröſse in dem Ausdrucke der Veränderung ihrer Function betrachtet, als wenn diese veränderliche Gröſse wirklich eine Veränderung erlitten hätte. Demnach führen diese zwey widersprechenden Voraussezungen, vermöge welcher man die veränderliche Gröſse erst so betrachtet, als ob sie eine Veränderung erlitten hätte, und dann so, als ob sie keine erlitten hätte, ohne daſs man dies zur Absicht hat, auf die Betrachtung der Gränze des Verhältnisses, welcher diese Veränderungen sich um desto mehr nähern, je kleiner sie sind, die sie aber nie erreichen, so lange sie noch wirkliche Veränderungen sind. Hier bringt der Calcul, der sich in die Unrichtigkeit und das Widersprechende der Gründe, nach welchen man ihn eingeleitet zu haben glaubt, nicht verwickelt, den Analysten glücklicher Weise auf den rechten Weg, und führt ihn, gleichsam wider seinen Willen, zum nämlichen Resultate, wie wenn er von richtigen und einander nicht entgegengesezten Gründen ausgegangen wäre. Dies ist, nach meiner Meinung, die *richtige und lichtvolle Theorie* (la Méthaphysique saine et lumineuse) *der ganzen Differentialrechnung.* Man begeht dabey keinen Fehler, man läſst dabey nichts ausser Acht, weil das, was man dabey ausser Acht zu lassen glaubt, um zu den Ausdrücken zu gelangen, welche den Gegenstand davon ausmachen, nicht blos in Beziehung auf diese Ausdrücke unvergleichbar, sondern schlechthin und nach der Strenge = o ist. Dieser Calcul, aus seinem wahren Gesichtspunkte betrachtet, hat nicht blos eine maralische und physische Gewiſsheit, (welche nichts weiter, als eine mathematische Wahrscheinlichkeit ist,) wie man nach der fehlerhaften Darstellung, die man nur zu oft von ihm gegeben hat, und nach den Autori-

tätsbeweisen, auf welche man sich stüzt, wenn man die Uebereinstimmung seiner Resultate, mit den Resultaten solcher Methoden zeigt, die keinem Zweifel unterworfen sind, leicht glauben könnte, sondern er hat eine strenge und mathematische Gewiſsheit, die der Gewiſsheit der einleuchtendsten Säze, welche die Grundlage der Elemente unserer Kenntnisse ausmachen, nichts nachgiebt. Z. B.

Wenn die veränderliche Gröſse x um die Gröſse Δx wächst, so wächst ihre n^{te} Potenz um die Gröſse $nx^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-2}\overline{\Delta x}^2 + \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) x^{n-3}\overline{\Delta x}^3 +$ etc. und das Verhältniſs der gleichzeitigen Veränderungen der Gröſse x und ihre Fluxion x^n ist immer das Verhältniſs von $1 : nx^{n-1} + \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2}\Delta x + \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3}\overline{\Delta x}^2 +$ etc.

Dieses Verhältniſs kann sich dem von $1 : nx^{n-1}$ mehr nähern, als jedes gegebene (nicht: angebliche) Verhältniſs; aber so lange diese Veränderungen Statt haben, ist ihr Verhältniſs nie das von $1 : nx^{n-1}$, oder, was eben so viel ist, das von $\Delta x : nx^{n-1}\Delta x$; so lange also Δx die Veränderung von x ist, ist die Veränderung von x^n niemals $nx^{n-1}\Delta x$. Wenn daher die Differentialrechnung mit der Bestimmung der gleichzeitigen Veränderungen der veränderlichen Gröſsen, oder mit der Vergleichung dieser Veränderungen sich beschäftigte, und die Veränderungen von x und x^n durch Δx und $nx^{n-1}\Delta x$ ausgedrückt würden, oder, wenn man sagte, das Verhältniſs dieser gleichzeitigen Veränderungen sey das von 1 zu nx^{n-1}; so würde uns diese Rechnung wirklichen Irrthümern

aussezen, oder wenigstens den Verdacht davon zurücklassen. Da aber die Differentialrechnung mit der Gränze des Verhältnisses der gleichzeitigen Veränderungen einer veränderlichen Gröſse und ihrer Functionen sich beschäftiget, und der Exponent des Gränzverhältnisses von x^n und x nach der Strenge nx^{n-1} ist; so hat die Rechnung, die zur Bestimmung dieses Exponenten führt, eine vollständige, und von den willkührlichen, vielleicht sogar irrigen Gesichtspunkten, aus welchen man ihren Gang betrachtet hat, unabhängige Gewiſsheit."

Der andere ist Herr *La Grange*, der in seinem neuestem Werke *) folgendes Urtheil darüber fällt: „Mir scheint es, daſs, da man bey der Differentialrechnung, wie sie gewöhnlich gebraucht wird, in der That die unendlich kleinen oder für unendlich klein angenommenen Gröſsen selbst betrachtet, und berechnet, die *wahre Theorie* (la véritable métaphysique) *dieses Calculs* darin bestehe, daſs der aus dieser falschen Voraussezung entspringende Irrthum durch denjenigen wieder berichtigt oder aufgehoben wird, welcher aus dem Gange des Calculs selbst entsteht, nach welchem man bey der Differentiation blos die unendlich kleinen Gröſsen von einerley Ordnung behält. z. B. Wenn man eine Curve als ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet, deren jede verlängert eine Tangente oder Curve ist, so ist klar, daſs man eine irrige Voraussezung macht, aber dieser Irrthum wird im Verfolge der Rechnung dadurch berichtiget, daſs man die unendlich kleinen Gröſsen ausser Acht läſst. Dies kann man

(*) Théorie des Fonctions Analytiques, etc. à Paris, 1797 p. 3.

leicht durch Beyspiele zeigen, aber es möchte vielleicht schwer seyn, einen allgemeinen Beweis davon zu geben."

§. 18. Daſs übrigens niemand vor *Carnot* diese einzig richtige und lichtvolle Theorie der Infinitesimalrechnung wirklich ausgeführt habe, bedarf wohl keines Beweises, da ausser ihm und den beyden zulezt genannten Analysten noch niemand die Idee davon gehabt hat, die lezteren aber es bey der blossen Anzeige derselben bewenden liessen, und, aus Abneigung gegen das Unendliche, die vorerwähnte Theorie vielmehr auf andere Gründe, der eine nämlich auf die Lehre von den Gränzen der Verhältnisse, der andere auf die Lehre von den Functionen, zurück zu führen sich bemüheten. Auch wird man eben nicht Ursache finden, sich sehr zu wundern, daſs die Abneigung gegen das Unendliche bey diesen Gelehrten so weit habe gehen können, wenn man die höchstunvollkommenen, einer mathematischen Wissenschaft ganz unwürdigen Darstellungen der ersten Gründe der Infinitesimalrechnung kennt, die nicht blos in den ersten und ältesten Werken eines *L'Hopital*, *Fontenelle*, *Wolf*, sondern selbst noch in dem sonst so vortreflichen Werke des unsterblichen *Euler* *) sich finden. Hat doch sogar noch im Jahre 1784 die mathematische Klasse der königl. preussischen Akademie zu Berlin, durch die damalige Lage der Wissenschaft sich veranlaſset gesehen, die europäischen Mathematiker durch einen ansehnlichen Preis einzuladen, in einer eigenen Abhandlung, *zu zei-*

(*) Man vergleiche darüber die treffenden Erinnerungen des Hrn. *L'Huilier* §. LXVII. seiner Preisschrift, und die lehrreichen Bemerkungen des sel. *Karsten* (Math. Abhandlungen I. §. 184. ff.

gen, wie aus einer widersprechenden Voraussezung so viele wahren Säze haben können hergeleitet werden, und ein sicheres, klares, mit einem Worte, wahrhaft mathematisches Princip anzugeben, das sich an die Stelle des Unendlichen sezen liesse, ohne die bisher vermittelst desselben behandelten Untersuchungen zu sehr zu erschweren, oder in die Länge zu ziehen. Ja man wird begreifen, wie, bey Männern, denen die Aufnahme der Wissenschaft am Herzen liegt, jene Abneigung gegen das Unendliche in einen dauernden Haſs habe übergehen können, wenn man den Unfug ansieht, den in den neuesten Zeiten bekannte Schriftsteller sogar in der Elementargeometrie mit den Begriffen des unendlich Groſsen und unendlich Kleinen getrieben, und bemerkt, wie sehr sie dadurch diese Wissenschaft verunstaltet und ihrer wesentlichsten Vorzüge beraubt haben.

Hrn. *L'Huilier's* Preisschrift beschäftigt sich hauptsächlich mit dem zweyten Theile der vorerwähnten Preisfrage, und fertigt den ersten in dem einzigen oben beygebrachten Paragraphen ab, welcher in der 1795 erschienenen umgearbeiteten lateinischen Ausgabe auch noch weggeschnitten worden ist; *Carnot* hingegen, — von dem ich übrigens nicht weiſs, ob ihm jene Preisfrage bekannt worden sey — widmet dem ersten Theile seine ganze Abhandlung, ohne sich auf den zweyten besonders einzulassen, weil er, nach dem Resultate, wozu ihn seine Beantwortung des ersten Theils führte, den zweyten als überflüssig ansehen muſste. Er zeigt daher, daſs wir eines Surrogats für die richtig verstandenen Gründe der Infinitesimalrechnung gar nicht bedürfen, und daſs es für die Wissenschaft gar nicht zuträglich seyn würde, wenn man die von mehreren neueren Analysten, und am nachdrücklichsten von Hrn.

L'Huilier's, zu diesem Behufe empfohlene Gränzenmethode dazu machen, und das Unendliche aus der Mathematik schlechterdings verbannen wollte.

§. 19. Was nun diesen Punkt betrift, so muſs ich gestehen, daſs, so sehr ich auch davon überzeugt bin, daſs die Wissenschaft sehr viel dadurch gewonnen haben würde, wenn sie gleich Anfangs auf die Gränzenlehre wäre gegründet worden, und so gerne ich Hrn. *L'Huilier's* Meinung beytrete, daſs dem Anfänger immer sehr viel dadurch erleichtert werde, wenn sie ihm zuerst nach dieser Methode vorgetragen wird, weil doch die Begriffe des unendlich Groſsen und unendlich Kleinen unläugbar so viele Behutsamkeit erfordern, wenn man nicht dadurch zu irrigen und widersprechenden Säzen geführt werden soll, ich doch glaube, daſs diese Absicht nicht durch die von Hrn. *L'Huilier* gewählte, auf die Vergleichung der homologen Glieder der Verhältnisse gegründete, *geometrische*, sondern vielmehr allein durch die auf die Betrachtung der Exponenten der Verhältnisse gegründete *arithmetische* Darstellung der Gränzenmethode zu erreichen stehe, weil jener Weg durch die damit verbundene ermüdende Weitschweifigkeit und, ihren unzertrennlichen Begleiter, den Mangel an Evidenz, für den Anfänger gar zu abschröckend ist. *) Auf der andern Seite aber sehe ich, nachdem wir nun eine völlig befriedigende Darstellung der Gründe der Infinitesimalrechnung haben, auch nicht ein, warum wir eben gegen das Unendliche so strenge seyn sollten, wie die Her-

(*) Nachdem dies schon einige Monate geschrieben war, hatte ich das Vergnügen, zu finden, daſs der Recensent von Hrn. *L'Huilier's* Werke in der A. L. Z. 1798. No. 17. p. 132, ganz derselben Meinung sey.

ren L'Huilier und La Grange wollen, und die Absicht der Berlinischen Akademie bey Bekanntmachung der mehrerwähnten Preisfrage vom Jahre 1784 gewesen zu seyn scheint.

§. 20. Vielmehr dünkt mich, wie die Sachen jezt stehen, liesse sich eine genugthuende Apologie desselben leicht aus folgenden Gründen führen:

I. Die Theorie des Unendlichen beruhet nicht auf dunkeln, unbestimmten und unmathematischen sondern auf deutlichen, richtigen und so genau bestimmten Begriffen, als man dies sonst bey den mathematischen gewohnt ist.

Um diesen Saz zu rechtfertigen, seze ich zu dem, was in *Carnot's* Abhandlung dafür gesagt ist, noch folgendes hinzu:

Man braucht, um dieses behaupten zu können, sich nur an folgende Begriffe zu halten:

Eine Gröſse heiſst *unendlich groſs*, wenn sie eines ins Unendlich fortgehenden Wachsthums fähig ist, und man (durch eine Fiction) ihre Zunahmen als *wirklich zu Ende gebracht*, und sie *mit allen dieſen Zunahmen* als *darſtellbar* sich gedenkt.

Z. B. ein Kreis von einem unendlichen Halbmesser.

Eine Gröſse heiſst *unendlich klein*, wenn sie einer ins Unendliche fortgehenden Verminderung fähig ist, und man (durch eine Fiction) ihre Abnahmen als *wirklich zu Ende gebracht*, und sie *ohne alle dieſe Abnahmen* als *darſtellbar* sich gedenkt.

Z. B. ein Bruch den man in einer fallenden unendlichen Reihe für das lezte Glied annimmt.

Die alten Metaphysiker haben sehr richtig das *actuale* oder *kategorematische* Unendliche (*Infinitum actu*) von dem *potentialen* oder *synkategorematischen* Unendlichen (Infinitum *potentia*) unterschieden, und unter dem ersteren das verstanden, was wirklich Unendlichkeit in sich hat, unter dem letzteren aber das, was zwar nicht wirklich unendlich, aber doch eines ins Unendliche, d. h. ohne Ende fortgehenden Wachsthums fähig ist. *) Philosophirende Mathematiker haben diese wohlgegründete Distinction aufgenommen, aus derselben die richtige Folge hergeleitet, daſs den Gröſsen nur potentiale Unendlichkeit zukommen könne, **) und sich dadurch vor den Irrthümern und Widersprüchen verwahrt, die Hr. *L'Huilier* §. §. LXI. ff. seiner Preisschrift an *L'Hopital*, *Fontenellen*, *Eulern* und andern rügt. ***)

(*) S. *Chauvini* Lexicon Philosoph. Leovard. 1713. Art. Infinitum.

(**) S. *Krafftii* Dissertatio de Infinito Mathematico. §. XVI. p. 14.

(***) Es war daher eine Ungerechtigkeit die der sel. *Kersten* an der Metaphysik begieng, wenn er (Math. Abh. I. p. 112.) sagte: „Aufklärungen in der Mathematik, welche wir der Metaphysik zu danken hätten, sind mir gar nicht bekannt.“ Und er hätte darüber von den bereits angeführten Schriftstellern, noch mehr aber von *Ploucquet* (Methodus Tractandi Infinita in Mathematik. Berol. 1748. §§. XVIII. -- XXVIII. und Expositiones Phil. Theor. Stuttg. 1782. §§. 73 -- 95. und von *Wolfen* (Ontol. P. II. Sect. II. Cap. III. besonders §§. 805. 823. 824.) eines andern belehrt werden können. Hätte *Wolf* die §§. 796 -- 824 dieses Kapitels bey seiner Analysis Infinitorum zum Grunde legen wollen, so würde sie gewiſs eine ganz andere Gestalt bekommen haben. Wahrscheinlich hielt ihn, blos

Und dies ist gerade dieselbige Distinction, auf welche auch Hr. *L'Huilier* (§. LXVI. Anmerk. 2. seiner Preisschrift) dringt, wo er für das potentiale Unendliche das Wort *infinible* und für das actuale das Wort *infini* vorschlägt, und sagt, das erste scheine ihm die *Fähigkeit, alle Begränzung auszuschliessen*, das lezte aber den *Zustand des Unbegränztseyns* zu bezeichnen.

Aus den vorhin angegebenen Begriffen des unendlich Groſsen und unendlich Kleinen folgt nothwendig der Grundsaz, daſs das Unendliche in allen Rechnungen Verhältnissen und Proportionen, wo es vorkommt, *nicht unter der Form des Unendlichen, sondern blos unter der Form des Endlichen* vorkomme, und folglich auch nur *in so ferne* allein den arithmetischen Operationen unterworfen werden könne. Und wer jene Begriffe und diesen Grundsaz sich immer gegenwärtig erhält, der wird glücklich über alle Schwierigkeiten hinwegkommen, wodurch bey dem gewöhnlichen Vortrage der Gründe der Infinitesimalrechnung der Fleiſs des Anfängers nur zu oft aufgehalten und nicht selten ganz zurück geschröckt wird.

---

sein bekanntes Bestreben, die mathematischen Wissenschaften, so leicht und gemeinfaſslich, als möglich zu machen, davon zurück, und bestimmte ihn im Vertrauen auf die untrügliche Richtigkeit der Resultate, über die den Principien anklebende Geschwindigkeiten sich hinweg zu sezen; ein Weg, den um seiner Bequemlichkeit willen, seine meisten Nachfolger bis auf die neuesten Zeiten eingeschlagen haben. Man vergleiche z. B. *De la Caille* Leçons Elémentaires des Mathematiques. Paris 1778. §. 778. und *Wolfii* Elem. Math. T. V. Comm. de Stud. Anal. Math. §. 226.

Wenn z. B. dx mit dy verglichen wird, so wird diese Vergleichung nicht angestellt in Ansehung der absoluten Gröſse, die diesen Elementen an sich zukommen mag, sondern lediglich in Ansehung der Entstehungsart der Integralgröſsen in einerley Figur. Sie werden, wie die Alten sich ausdrückten, nur in sensu composito, nicht in sensu diviso mit einander verglichen, d. h. dx und dy werden blos als in *einem* Dritten verbunden betrachtet, und man sollte deſswegen $\frac{dy}{dx}$ eigentlich immer als ein einziges untheilbares Zeichen, nämlich als das Zeichen des Exponenten des Gränzverhältnisses der gleichzeitigen Veränderungen der Gröſsen y und x ansehen und behandeln, wie auch Hr. *L'Huilier* (§. 24. der zweyten Ausgabe seiner Preisschrift) ausdrücklich verlangt und durch sein ganzes Werk beständig beobachtet. Verstattet man sich aber, wie dies bisher gewöhnlich war, und durch die Erfahrung als zulässig bewährt ist, die beyden Theile dieses Zeichens zu trennen, und z. B. aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$ herzuleiten $dy = adx$, so muſs man nie vergessen, daſs das einzelne dx und dy nur als Theil *eines* Zeichens $\frac{dy}{dx}$ Sinn, und *für sich* einen blos abgeleiteten Rechnungssinn hat, dem im Bezeichneten nichts entspricht. Denn man kann nicht sagen, dieses Element sey gröſser oder kleiner, als ein anderes Element, wenn die Linie, zu welcher die Elemente gehören, an sich betrachtet wird. Da man aber bey den Curven auf die Art der Veränderungen ihrer Coordinaten zu sehen hat, und die Elemente der Coordinaten in Beziehung auf die Curve einerley Natur haben müssen, wie die Coordinaten selbst, so finden auch bey jenen so gut, wie bey diesen, geo-

metrische Proportionen Statt, weil das Unendliche in allen Ausdrücken unter der Form des Endlichen vorkommt. Man vergleicht also nicht ein Unendliches, als ſolches, mit einem andern Unendlichen, als solchen, sondern eine Gröſse, welche die Art dieser oder jener Veränderung ausdrückt, mit einer Gröſse, welche eine andere Art der Veränderung ausdrückt. So werden bey der *Barrowischen* Tangentenmethode an die Stelle der unendlich kleinen Gröſsen die ihnen proportionirte endliche Gröſsen gesezt, und man erhält den Werth der Subtangente in lauter endlichen oder bestimmbaren Gröſsen. Und ebenso wird in allen Fällen das Unendliche auf die Form des Endlichen gebracht.

Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet ist also die Infinitesimalrechnung nichts anders, als eine Anwendung des fruchtbaren *Reductionsgrundsazes*, wovon *Wolf* in allen seinen Werken so nüzlichen Gebrauch gemacht hat; (*) und mich dünkt diese Vorstellungsart schliesse sich recht gut an *Carnot's* Darstellung an.

II. Die Theorie des Unendlichen führt nicht auf beynahe wahre, sondern auf ganz genaue Resultate.

Dies ist von Hrn. *L'Huilier* in dem oben beygebrachten Paragraphen kurz und in *Carnot's* Abhandlung ausführlich gezeigt.

III. Sie leistet solches auf einem viel kürzeren und einfacheren Wege, als die übrigen Methoden, die man an ihre Stelle sezen wollte.

Auch dieses hat *Carnot* sehr befriedigend gezeigt, und Hrn. *L'Huiliers* ganzes Werk kann als

---

(*) M. s. darüber besonders *Wolfii* Ratio Praelect. ed. 2. 1735. Cap. II. §. 15. Cap. IV. §. 40. ff.

ein zusammenhangender Beweis dafür angesehen werden, so, daſs ich noch mehrere anzuführen für überflüssig halte. **)

IV. Wenn auch das leztere sich gerade umgekehrt verhielte, so würde sie doch den übrigen Methoden schon deswegen vorzuziehen seyn, weil, wenn wir sie auch aus allen unsern Rechnungen verbannen wollten, wir sie doch aus der Natur nicht verbannen können, sondern auf sie zurückkommen müssen, so bald wir unsere Rechnungen auf Gegenstände der Natur anwenden wollen.

Wir werden nämlich überall auf die Rechnung des Unendlichen geführt, wo wir stetige Veränderungen der Erscheinungen annehmen müssen. Nun hat aber die neuere Philosophie aus der Einrichtung unserer Sinnlichkeit bewiesen, daſs die ganze materielle Natur d. h. der Innbegriff aller Erscheinungen 1) ihrer anschaulichen Ausdehnung, 2) ihrer Intensität der Empfindung, 3) aller ihrer Veränderungen nach dem Geseze der Stetigkeit unterworfen sey; folglich ist die Fiction der unendlichen Gröſsen wirklich die Hypothese der Natur, von welcher wir ausgehen müssen, sobald wir unsere Rechnung der Natur anpassen, oder auf sie anwenden wollen. Eine Menge von Beyspielen davon enthält die höhere Mechanik und Dynamik und überhaupt jede Anwendung der höheren Mathematik auf die Natur. Nur muſs man dabey nie vergessen, daſs alle Resultate, die man aus einem, nach diesen Voraussezungen eingeleiteten, Calcul gefunden hat, in der tropischen Rechnungssprache ausgedrückt seyen, und erst in die eigentliche Wort-

---

(*) Man vergleiche darüber *La Grange* Theorie des Fonct. Anal. §. 4. p. 3.

sprache übersezt werden müssen, ehe man Anwendungen davon machen will. Denn so bald man dieses verabsäumt, ist man keinen Augenblick mehr sicher vor Ausschweifungen in die Sphäre verwandter Begriffe, und Spielereyen der Phantasie, die alle Deutlichlichkeit der Erkenntniſs zerstören, und die ganze Wissenschaft mit dem Schleyer des Geheimnisses umhüllen. *)

(*) Dies ist selbst *Leibnizen* mehr, als einmal, begegnet; z. B. Opp. T. III. p. 105. wo er sagt: „Die Betrachtung des Unendlichen muſs bey den meisten Wirkungen der Natur vorkommen, damit sie ihren Urheber desto besser darstellen kann.“ und l. c. p. 392. „Die Infinitesimalrechnung hat man hauptsächlich bey Anwendung der Mathematik auf die Physik nöthig, weil in den Wirkungen der Natur der Charakter ihres unendlichen Urhebers gewöhnlich ausgedrückt ist.“

Darmstadt,
gedruckt bey L. C. Wittich.

Druckfehler und Verbesserungen.

Vorrede.

S. I. Z. 4 statt Réflections lese man Réflexions.
- II. z. 2 ist das Wort in wegzustreichen.
- VI. z. 5 st. Direktor l. m. Director.
- IX. z. 1 st. gsnzes l. m. ganzes.
- XIV. z. 5 st. diesem l. m. diesen.
Ebend. z. 12 v. u. st. seye l. m. seyn.
S. XV. z. 3 v. u. ist nach dem Wort fixa st. des Puncts ein Comma zu sezen.
- XIX. z. 1 v. u. und so oft dies Wort in der Folge noch vorkommt, ist st. Schur-Eisen zu lesen Schiir-Eisen.
- XXIV. z. 12. und so oft dies Wort in der Folge vorkommt, ist st. Galimathias zu lesen: Gallimatthias.
Ebend. st. käufig l. m. häufig.
Ebend. z. 8 v. u. st. bezeichnenderm l. m. bezeichnendern.
S. XXVI. z. 9 v. u. st. hofte l. m. hoffte.
- XXVII. z. 2 v. u. st. Publikums l. m. Publicums.
- XXVIII. z. 14 v. u. st. zweite l. m. zweyte.
- XXIX. z. 5 v. u. st. welchen l. m. welchem.
- XXXIII. z. 9 v. u. st. vorhin bestimmten l. m. vorhin bestimmten.
- XXXVI. z. 3 v. u. st. Urheilen l. m. Urtheilen.
- XXXIX. z. 4 st. vornannten l. man vorgenannten.
- XLIII. z. 5 st. Devotionsbezeugung l. m. Devotionsbezeigung.
- XLV. z. 6 st. urbanes l. m. urbaneres.
- XLVI. z. 5 v. u. st. den er seinen Freund l. m. dessen Freund Er sich.
Ebend. z. 2 v. u. st. müſste l. m. muſste.
S. L. z. 9 st. en l. une.
- LI. z. 3. st. und 1798, l. m. 1798 und.
- LVI. z. 6 v. u. ist der Strich nach dem Worte: ich, auszulöschen, und vor das Wort: denn, zu sezen.
Ebend. z. 5 v. u. und in der Folge überall st. Maase l. m. Maaſse.
S. LVIII. z. 8. st. ordentlichen l. man ordentlichem.

Abhandlung.

S. 1. z. 6. st. Naturgeschichte l. m. Naturgeseze. Ebend. z. 13 und in der Folge überall, ist st. Grösen zu lesen Gröſsen. S. 2. z. 9 st. gegründet, l. m. ergründet. S. 4 z. 5. v. u. st. TP. MP. l. m. TP: MP. Ebend. z. 1 v. u. st. $(x + MO)2$ l. m. $(x + MO)^2$. S. 5 z. 9. und z. 17 v. u. st.

$$\frac{y\,2}{a-x}$$ l. m. $$\frac{y^2}{a-x}$$

S. 7. z. 6 st. Nahrungsmethode l. m. Näherungsmethode. Ebend. z. 9. v. u. st. rechnen l. m. nehmen. S. 9 z. 5 st. ein l. m. eine. S. 10 Z. 8. st. haben l. m. habe. Ebend. z. 9 st. um l. m. und. Ebend. z. 6 v. u. st. Irrshümer l. m. Irrthümer. S. 11 z. 1 v. u. st. den l. m. die. S. 13 z. 18 st. Linien l. m. Linie. Ebend. z. 13 v. u. st. Anfgabe l. m. Aufgabe. S. 14 z. 4 v. u. st. mataphysischen l. m. metaphysischen. S. 17 z. 7 v. u. st. Gränzen l. m. Gränze. S. 21 z. 14 st. Gleichung l. m. Gleichungen. S. 22 z. 12 st. ausgedruckt l. m. ausgedrückt. S. 24 z. 12 v. u. st. angegeben l. m. angenommen. Ebend. z. 8.

v. u. st. Aufgaben l. m. Coefficienten. S. 28. z. 16. st. der l. m. die. Ebend. z. 15 v. u. st. den l. m. der. S. 32 z. 12 st. bestimmtere l. m. bestimmte. S. 33 z. 3. st. jeden l. m. jeder. S. 36 z. 17 v. u. st. $\overset{TP}{MP}$ l. m. $\frac{TP}{MP}$ S. 40 z. 6 st. Einwendung l. m. Einwendungen. Ebend. z. 15 v. u. st. einfache l. m. einfachere. Ebend. z. 14 v. u. st. unbestimmte Analytik l. m. Methode der unbestimmten Coefficienten. S. 42 z. 11. ist der Punct nach ZS auszulöschen. S. 44 z. 4 ist nach y ein Comma zu sezen. S. 45 z. 5 und in der Folge überall, wo das Zeichen in dieser Bedeutung vorkommt, ist st. des S aus dem groſsen Alphabethe das lange ſ des kleinen Alphabeths zu sezen. Ebend. z. 8, 4 u. 3. v. u. ist st. des groſsen Z das kleine z zu sezen. Das neml. gilt auch von S. 46 z. 2 3 9. Desgl. von S. 48 z. 4. Ebend. z. 15 st. sdx l. m. ſdx. S. 49 z. 1 2 3 ist wieder st. des groſsen Z das kl. z zu sezen. Ebend. z. 14 st. Hauptredeln l. m. Hauptregeln. Ebend. z. 1 v. u. st. änhere l. m. nähere. S. 56 z. 4. v. u. ist nach dem Worte man, einzuschalten das Wort: so.

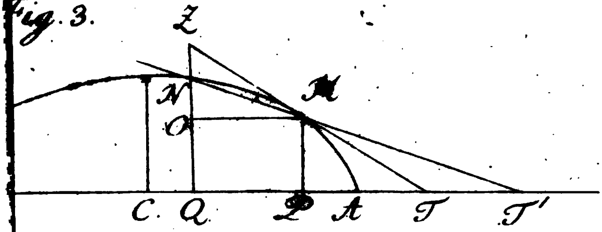
Zusäze.

S. 60 z. 19 st. bey der l. m. beyder, als ein Wort. Ebend. z. 21 st. können, l. m. könne. S. 61 z. 16 st. einen l. m. einem. S. 62 z. 9 st. indirekten l. m. indirecten. S. 63 z. 2 st. bestheht l. m. besteht. Ebend. z. 12 v. u. ist nach dem Worte: zog, das Wort: als einzuschalten. S. 64 z. 4. st. Vermuthungen l. m. Vorstellungen. S. 65. z. 12 und 13 v. u. st. des Cartes's l. m. Des Cartes's. S. 67 z. 1 und 3 v. u. wie auch S. 68 z. 5 und 10 ist st. des groſsen Z das kleine z. zu sezen. S. 76 z. 3 v. u. st. Clemens l. m. Clemm's. S. 86 z. 7 st. wäre l. m. war. S. 90 z. 7 st. des groſsen Z das kleine z. zu sezen. S. 95 z. 5 v. u. st. Rergleicht l. m. Vergleicht. S. 97 z. 3 v. u. st. Hintergrunde l. m. Hintergliede. S. 98 z. 5 v. u. st. maralische l. m. moralische. S. 99 z. 14 15 st. ihre Fluxion l. m. ihrer Function. S. 100 z. 6 v. u. st. oder l. m. der. S. 104 z. 14 v. u. st. Unendlich l. m. Unendliche. S. 105. z. 8. v. u. st. Mathematik l. m. Metaphysicis. S. 106 z. 7. v. u. st. Geschwindigkeiten l. m. Schwierigkeiten. S. 109 z. 16 v. u. st. aller ihrer, l. m. allen ihren. Ebend. z. 11 v. u. st. Rechnung l. m. Rechnungen. S. 110 z. 4. st. Ausschweifungen l. Abschweifungen.

Nachtrag.

Zu der in der Vorrede S. XXIX ff. geführten Vertheidigung des Ausdrucks: hölzernes Schür-Eisen kann ich noch hinzusezen, daſs Hr. Hofprediger Schulz in Königsberg in seiner Prüfung der Kantischen Critik der reinen Vernunft eben dieses Ausdrucks gegen Hrn. Prof. Brastberger sich bedient habe. Und doch ist der Ton des Hrn. Schulz in seinen polemischen Schriften, selbst da, wo er es mit unwürdigen und verächtlichen Gegnern zu thun hat, in Absicht auf Anständigkeit und Urbanität allgemein als musterhaft anerkannt und gerühmt worden!

Fig. 3.



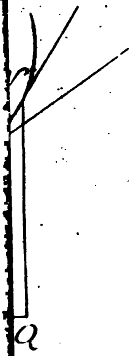
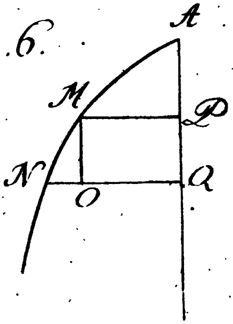


Fig. 6.



Carnot. Tab. I.

UNIV. OF

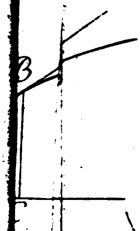


Fig. 9.

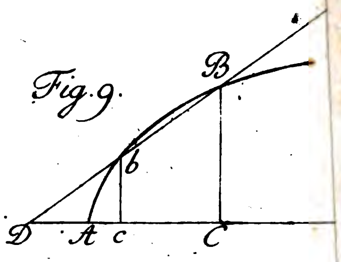


Fig. 1

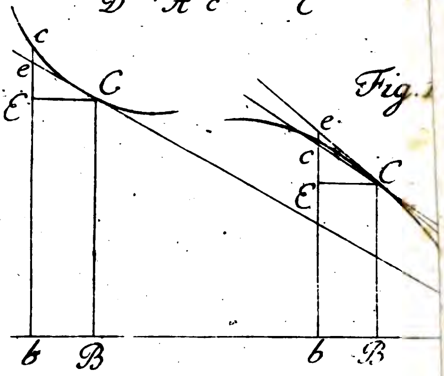
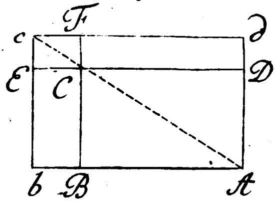


Fig. 15.



Carnot. Ta